Über befreundete Zahlen*

Leonhard Euler

§1

Definition

Zwei Zahlen werden befreundet genannt, wenn sie so beschaffen sind, dass die Summe der echten Teiler der einen gleich der anderen Zahl ist und umgekehrt die Summe der echten Teiler der anderen der ersten Zahl gleich wird.
So sind die Zahlen 220 und 284 befreundet; denn die echten Teiler der ersten Zahl 220 zusammengenommen

$$1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110$$

geben 284 und die echten Teiler dieser Zahl 284

$$1 + 2 + 4 + 71 + 142$$

ergeben die erste Zahl 220.

Scholion

§2 Stifel, welcher als erster eine Erwähnung von Zahlen dieser Art gemacht hat, scheint, diese zwei Zahlen 220 und 284 betrachtend, zufällig zu dieser

*Originaltitel: "De numeris amicabilibus", zuerst publiziert in: *Opuscula varii argumenti, Band* 2 (1750, geschrieben 1747): pp. 23– 107, Nachdruck in: Opera Omnia: Serie 1, Band 2, pp. 86 – 162, Eneström Nummer E152, übersetzt von: Alexander Aycock für den "Euler-Kreis Mainz".

Betrachtung geführt worden zu sein; denn er schätzt die Analysis als ungeeignet ein, mit ihrer Hilfe mehrere dieser Zahlenpaare zu finden. DESCARTES hingegen hat versucht, die Analysis auf diese Aufgabe anzuwenden und eine Regel angegeben, mit welcher er drei von solchen Paaren gefunden hat, und außer diesen war es SCHOTEN, der sich viel mit dieser Untersuchung aufgehalten zu haben scheint, möglichst viele zu entdecken. Nach dieser Zeit findet man fast keinen Geometer, der Mühe darauf verwendet hat, diese Frage umfassender zu beantworten. Weil aber kein Zweifel besteht, dass die Analysis auch aus diesem Zweig nicht zu verachtende Zuwächse erfahren wird, wenn eine Methode eröffnet wird, mit welcher sich um vieles mehr Paare von Zahlen dieser Art finden lassen, glaube ich, dass es nicht unangenehm sein wird, wenn ich gewisse sich hierauf beziehende Methoden, auf welche ich zufällig gestoßen bin, mitgeteilt haben werde. Zu diesem Zweck ist es aber vonnöten, die folgenden Dinge vorauszuschicken.

HYPOTHESE

§3 *Wenn n irgendeine ganze positive Zahl bezeichnet, von welcher Art die Zahlen hier immer zu verstehen sind, werde ich die Summe all ihrer Teiler mit diesem Zeichen $\int n$ anzeigen, sodass das Symbol $\int$ einer Zahl vorangestellt die Summe aller Teiler derselben Zahl bedeutet; so wird $\int 6 = 1 + 2 + 3 + 6 = 12$ sein.*

KOROLLAR 1

§4 Weil ja zu den Teilern einer jeden Zahl auch die Zahl selbst gezählt wird, die echten Teiler aber als die Teiler ohne die Zahl selbst angesehen werden, ist es offenkundig, dass die Summe aller echten Teiler der Zahl n mit $\int n - n$ ausgedrückt wird.

KOROLLAR 2

§5 Weil ja eine Primzahl keine anderen Teiler zulässt außer der Einheit und sich selbst, wird, wenn n eine Primzahl ist, $\int n = 1 + n$ sein. Weil aber im Fall $n = 1$ auch $\int 1 = 1$ ist, ist es klar, dass die Einheit nicht zurecht zu den Primzahlen gezählt wird.

LEMMA 1

§6 *Wenn m und n zu einer teilerfremde Zahlen waren, dass sie außer der Einheit keinen gemeinsamen Teiler haben, dann wird $\int mm = \int m \cdot \int n$ sein oder die Summe der Teiler des Produktes mn ist dem Produkt aus den Summen der Teiler der beiden Zahlen m und n gleich.*

Denn das Produkt mn hat zuerst die einzelnen Teiler jeder der beiden Faktoren m und n, dann aber ist es darüber hinaus durch die Produkte aus den einzelnen Zahlen der Zahl m mit den einzelnen Faktoren der Zahl n teilbar. Alle diese Teiler von mn gehen aber zusammengenommen hervor, wenn $\int m$ mit $\int n$ multipliziert wird.

KOROLLAR 1

§7 Wenn jede der beiden Zahlen m und n prim ist und daher $\int m = 1 + m$ und $\int n = 1 + n$, wird die Summe der Teiler des Produktes

$$\int mn = (1+m)(1+n) = 1 + m + n + mn$$

sein. Wenn außerdem p eine von m und n verschiedene Primzahl ist, wird

$$\int mnp = \int mn \cdot \int p = \int m \cdot \int n \cdot \int p = (1+m)(1+n)(1+p)$$

sein. Und daher wird die Summe der Teiler einer jeden Zahl, die das Produkt aus beliebig vielen verschiedenen Primzahlen ist, leicht angegeben werden.

KOROLLAR 2

§8 Wenn m, n und p zwar keine Primzahlen sind, aber dennoch von solcher Art, dass sie außer der Einheit keinen gemeinsamen Teiler haben, dann werden mn und p zueinander teilerfremde Zahlen sein und deshalb wird $\int mnp = \int mn \cdot \int p$ sein. Weil aber $\int mn = \int m \cdot \int n$ ist, wird $\int mnp = \int m \cdot \int n \cdot \int p$ sein.

SCHOLION

§9 Wenn die Faktoren m, n, p keine teilerfremden Zahlen sind, ist die Summe der Teiler des Produktes, wie es das Lemma angibt, nicht korrekt. Denn weil gemäß des Lemmas die einzelnen Teiler der Faktoren m, n und p auf die Teiler des Produktes mnp bezogen werden, würde, wenn sie einen gemeinsamen Teiler hätten, zweimal in den Teilern des Produktes gezählt werden; aber während die Frage über die Summe der Teiler einer gewissen Zahl gestellt wird, darf kein Teiler zweimal gezählt werden. Daher, wenn m und n Primzahlen sind und $m = n$ gilt, wird nicht $\int nn = \int n \cdot \int n = (1+n)^2 = 1 + 2n + nn$ sein, sondern man wird $\int nn = 1 + n + nn$ haben und der Teiler n sollte nicht doppelt gesetzt werden. Weil also nach diesem Lemma die Summe der Teiler einer jeden Zahl, welche das Produkt aus beliebig vielen verschiedenen Primzahlen ist, richtig angegeben wird, ist es übrig, dass für gleiche Faktoren eine Regel angegeben wird, mit deren Hilfe die Summe der Teiler des Produktes bestimmt werden kann.

Lemma 2

§10 *Wenn n eine Primzahl ist, wird $\int n^2 = 1 + n + n^2$, $\int n^3 = 1 + n + n^2 + n^3$, $\int n^4 = 1 + n + n^2 + n^3 + n^4$ sein und allgemein wird $\int n^4 = 1 + n + n^2 + \cdots + n^k = \frac{n^{k+1}-1}{n-1}$ sein.*

Korollar 1

§11 Weil $\int n = 1 + n$ ist, wird $\int n^2 = \int n + n^2$ oder auch $\int n^2 = 1 + n \int n$ sein. In gleicher Weise wird $\int n^3 = \int n^2 + n^3$ sein oder auch $\int n^3 = 1 + n \int n^2$ sein; und weiter $\int n^4 = \int n^3 + n^4$ oder $\int n^4 = 1 + n \int n^3$ und so weiter. Und so wird aus der bekannten Teilersumme der Potenz n^k leicht die Summe der Teiler der Potenz der folgenden Potenz n^{k+1} angegeben, weil $\int n^{k+1} = \int n^k + n^{k+1}$ oder $\int n^{k+1} = 1 + n \int n^k$ ist.

Korollar 2

§12 Damit die Summe der Teiler leichter in Faktoren ausgedrückt werden kann, ist zu bemerken, dass gilt

$$\int n^3 = (1+n)(1+n^2) = (1+n^2)\int n,$$

$$\int n^5 = (1+n^2+n^4)\int n, \quad \int n^7 (1+n^2+n^4+n^6)\int n = (1+n^4)(1+n^2)\int n;$$

und so können die Summe der Teiler von ungeraden Potenzen immer faktorisiert dargeboten werden, aber die Summen der Teiler der geraden Potenzen werden stets teilerfremd sein.

KOROLLAR 3

§13 Daraus wird also leicht eine Tabelle erstellt werden können, in welcher nicht nur von allen Primzahlen, sondern auch von allen Potenzen die Summe der Teiler dargeboten wird. Es scheint ratsam, eine Tabelle von dieser Art hier beizufügen, in welcher von allen Primzahlen kleiner als eine Million und deren Potenzen bis hin zur dritten und höheren für die kleineren Zahlen die Summe der Teiler in Faktoren ausgedrückt angegeben werden.

Zahl	Teilersumme	Zahl	Teilersumme	Zahl	Teilersumme
2	3	3	2^2	11	$2^2 \cdot 3$
2^2	7	3^2	13	11^2	$7 \cdot 19$
2^3	$3 \cdot 5$	3^3	$2^3 \cdot 5$	11^3	$2^3 \cdot 3 \cdot 61$
2^4	31	3^4	11^2	11^4	$5 \cdot 3221$
2^5	$3^2 \cdot 7$	3^5	$2^2 \cdot 7 \cdot 13$	11^5	$2^2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 19 \cdot 37$
2^6	127	3^6	1093	11^7	$43 \cdot 45319$
2^7	$3 \cdot 5 \cdot 17$	3^7	$2^4 \cdot 5 \cdot 41$	11^7	$2^4 \cdot 3 \cdot 61 \cdot 7321$
2^8	$7 \cdot 73$	3^8	$13 \cdot 757$	11^8	$7 \cdot 19 \cdot 1772893$
2^9	$3 \cdot 11 \cdot 31$	3^9	$2^2 \cdot 11^2 \cdot 61$	11^9	$2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 3221 \cdot 13421$
2^{10}	$23 \cdot 89$	3^{10}	$23 \cdot 3851$		
2^{11}	$3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$	3^{11}	$2^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 73$	13	$2 \cdot 7$
2^{12}	8191	3^{12}	797161	13^2	$3 \cdot 61$
2^{13}	$3 \cdot 43 \cdot 127$	3^{13}	$2^2 \cdot 547 \cdot 1093$	13^3	$2^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 17$
2^{14}	$7 \cdot 31 \cdot 151$	3^{14}	$11^2 \cdot 13 \cdot 4561$	13^4	30941
2^{15}	$3 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 257$	3^{15}	$2^5 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 41 \cdot 193$	13^5	$2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 61 \cdot 157$
2^{16}	131071			13^6	5229043
2^{17}	$3^3 \cdot 7 \cdot 19 \cdot 73$	5	$2 \cdot 3$	13^7	$2^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 17 \cdot 14281$
2^{18}	524287	5^2	31	17	$2 \cdot 3^2$
2^{19}	$3 \cdot 5^2 \cdot 11 \cdot 31 \cdot 41$	5^3	$2^2 \cdot 3 \cdot 13$	17^2	307
2^{20}	$7^2 \cdot 127 \cdot 337$	5^4	$11 \cdot 71$	17^3	$2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 29$
2^{21}	$3 \cdot 23 \cdot 89 \cdot 683$	5^5	$2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 31$	17^4	88741
2^{22}	$47 \cdot 178481$	5^6	19531	17^5	$2 \cdot 3^3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 307$
2^{23}	$3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 241$	5^7	$2^3 \cdot 3 \cdot 13 \cdot 313$		
2^{24}	$31 \cdot 601 \cdot 1801$	5^8	$19 \cdot 31 \cdot 829$	19	$2^2 \cdot 5$
2^{25}	$3 \cdot 2731 \cdot 8191$	5^9	$2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 71 \cdot 521$	19^2	$3 \cdot 127$
2^{26}	$7 \cdot 73 \cdot 262657$			19^3	$2^3 \cdot 5 \cdot 181$
2^{27}	$3 \cdot 5 \cdot 29 \cdot 43 \cdot 113 \cdot 127$	7	2^3	19^4	$151 \cdot 911$
2^{28}	$233 \cdot 1103 \cdot 2089$	7^2	$3 \cdot 19$	19^5	$2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7^3 \cdot 127$
2^{29}	$3^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 31 \cdot 151 \cdot 331$	7^3	$2^4 \cdot 5^2$	23	$2^3 \cdot 3$
2^{30}	2147483647	7^4	2801	23^2	$7 \cdot 79$
2^{31}	$3 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 257 \cdot 65537$	7^5	$2^3 \cdot 3 \cdot 19 \cdot 43$	23^3	$2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 53$
2^{32}	$7 \cdot 23 \cdot 89 \cdot 599479$	7^6	$29 \cdot 4733$	23^4	292561
2^{33}	$3 \cdot 43691 \cdot 131071$	7^7	$2^5 \cdot 5^2 \cdot 1201$		
2^{34}	$31 \cdot 71 \cdot 127 \cdot 122921$	7^8	$3^2 \cdot 19 \cdot 37 \cdot 1063$	29	$2 \cdot 3 \cdot 5$
2^{35}	$3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 37 \cdot 73 \cdot 109$	7^9	$2^3 \cdot 11 \cdot 191 \cdot 2801$	29^2	$13 \cdot 67$
2^{36}	$223 \cdot 616318177$	7^{10}	329554457	29^3	$2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 421$

Zahl	Teilersumme	Zahl	Teilersumme	Zahl	Teilersumme
31	2^5	79	$2^4 \cdot 5$	137	$2 \cdot 3 \cdot 23$
31^2	$3 \cdot 331$	79^2	$3 \cdot 7^2 \cdot 43$	137^2	$7 \cdot 37 \cdot 73$
31^3	$2^6 \cdot 13 \cdot 37$	79^3	$2^5 \cdot 5 \cdot 3121$	137^3	$2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 23 \cdot 1877$
37	$2 \cdot 19$	83	$2^2 \cdot 3 \cdot 7$	139	$2^2 \cdot 5 \cdot 7$
37^2	$3 \cdot 7 \cdot 67$	83^2	$19 \cdot 367$	139^2	$3 \cdot 13 \cdot 499$
37^3	$2^2 \cdot 5 \cdot 19 \cdot 137$	83^3	$2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 53$	139^3	$2^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9661$
41	$2 \cdot 3 \cdot 7$	89	$2 \cdot 3^2 \cdot 5$	149	$2 \cdot 3 \cdot 5^2$
41^2	1723	89^2	8011	149^2	$7 \cdot 31 \cdot 103$
41^3	$2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 29^2$	89^3	$2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 233$	149^3	$2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 17 \cdot 653$
43	$2^2 \cdot 11$	97	$2 \cdot 7^2$	151	$2^3 \cdot 19$
43^2	$3 \cdot 631$	87^2	$3 \cdot 3169$	151^2	$3 \cdot 7 \cdot 1093$
43^3	$2^3 \cdot 5^2 \cdot 11 \cdot 37$	97^3	$2^2 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 941$	151^3	$2^4 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 877$
47	$2^4 \cdot 3$	101	$2 \cdot 3 \cdot 17$	157	$2 \cdot 79$
47^2	$37 \cdot 61$	101^2	10303	157^2	$3 \cdot 8269$
47^3	$2^5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 17$	101^3	$2^2 \cdot 3 \cdot 17 \cdot 5101$	157^3	$2^2 \cdot 5^2 \cdot 17 \cdot 29 \cdot 79$
53	$2 \cdot 3^3$	103	$2^3 \cdot 13$	163	$2^2 \cdot 41$
53^2	$7 \cdot 409$	103^2	$3 \cdot 3571$	163^2	$3 \cdot 7 \cdot 19 \cdot 67$
53^3	$2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 281$	103^3	$2^4 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 1061$	163^3	$2^3 \cdot 5 \cdot 41 \cdot 2657$
59	$2^2 \cdot 3 \cdot 5$	107	$2^2 \cdot 3^3$	167	$2^3 \cdot 3 \cdot 7$
59^2	3541	107^2	$7 \cdot 13 \cdot 127$	167^2	28057
59^3	$2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 1741$	107^3	$2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 229$	167^3	$2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 2789$
61	$2 \cdot 31$	109	$2 \cdot 5 \cdot 11$	173	$2 \cdot 3 \cdot 29$
61^2	$3 \cdot 13 \cdot 97$	109^2	$3 \cdot 7 \cdot 571$	173^2	30103
61^3	$2^2 \cdot 31 \cdot 1861$	109^3	$2^2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 457$	173^3	$2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 29 \cdot 41 \cdot 73$
67	$2^2 \cdot 17$	113	$2 \cdot 3 \cdot 19$	179	$2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$
67^2	$3 \cdot 7^2 \cdot 31$	113^2	$13 \cdot 991$	179^2	$7 \cdot 4603$
67^3	$2^3 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 449$	113^2	$2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 19 \cdot 1277$	179^3	$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 37 \cdot 433$
71	$2^3 \cdot 3^2$	127	2^7	181	$2 \cdot 7 \cdot 13$
71^2	5113	127^2	$3 \cdot 5419$	181^2	$3 \cdot 79 \cdot 139$
71^3	$2^4 \cdot 3^2 \cdot 2521$	127^3	$2^8 \cdot 5 \cdot 1613$	181^3	$2^2 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 16381$
73	$2 \cdot 37$	131	$2^2 \cdot 3 \cdot 11$	191	$2^6 \cdot 3$
73^2	$3 \cdot 1801$	131^2	17293	191^2	$7 \cdot 13^2 \cdot 31$
73^3	$2^2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 37 \cdot 41$	131^3	$2^3 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 8581$	191^3	$2^7 \cdot 3 \cdot 17 \cdot 29 \cdot 37$

Zahl	Teilersumme	Zahl	Teilersumme	Zahl	Teilersumme
193	$2 \cdot 97$	257	$2 \cdot 3 \cdot 43$	317	$2 \cdot 3 \cdot 53$
193^2	$3 \cdot 7 \cdot 1783$	257^2	$61 \cdot 1087$	317^2	$7 \cdot 14401$
193^3	$2^2 \cdot 5^3 \cdot 97 \cdot 149$	257^3	$2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 43 \cdot 1321$	317^3	$2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 53 \cdot 773$
197	$2 \cdot 3^2 \cdot 11$	263	$2^3 \cdot 3 \cdot 11$	331	$2^2 \cdot 83$
197^2	$19 \cdot 2053$	263^2	$7^2 \cdot 13 \cdot 109$	331^2	$3 \cdot 7 \cdot 5233$
197^3	$2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 3881$	263^3	$2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 6917$	331^3	$2^3 \cdot 29 \cdot 83 \cdot 1889$
199	$2^3 \cdot 5^2$	269	$2 \cdot 3^3 \cdot 5$	337	$2 \cdot 13^2$
199^2	$3 \cdot 13267$	269^2	$13 \cdot 37 \cdot 151$	337^2	$3 \cdot 43 \cdot 883$
199^3	$2^4 \cdot 5^2 \cdot 19801$	269^3	$2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 97 \cdot 373$	337^3	$2^2 \cdot 5 \cdot 13^2 \cdot 41 \cdot 277$
211	$2^2 \cdot 53$	271	$2^4 \cdot 17$	347	$2^2 \cdot 3 \cdot 29$
211^2	$3 \cdot 13 \cdot 31 \cdot 37$	271^2	$3 \cdot 24571$	347^2	$7 \cdot 13 \cdot 1327$
211^3	$2^3 \cdot 53 \cdot 113 \cdot 197$	271^3	$2^5 \cdot 17 \cdot 36721$	347^3	$2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 29 \cdot 12041$
223	$2^5 \cdot 7$	277	$2 \cdot 139$	349	$2 \cdot 5^2 \cdot 7$
223^2	$3 \cdot 16651$	277^2	$3 \cdot 7 \cdot 19 \cdot 193$	349^2	$3 \cdot 19 \cdot 2143$
223^3	$2^6 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 4973$	277^3	$2^2 \cdot 5 \cdot 139 \cdot 7673$	349^3	$2^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 60901$
227	$2^2 \cdot 3 \cdot 19$	281	$2 \cdot 3 \cdot 47$	353	$2 \cdot 3 \cdot 59$
227^2	$73 \cdot 709$	281^2	$109 \cdot 727$	353^2	$19 \cdot 6577$
227^3	$2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 19 \cdot 5153$	281^3	$2^2 \cdot 3 \cdot 13 \cdot 47 \cdot 3037$	353^3	$2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 59 \cdot 733$
229	$2 \cdot 5 \cdot 23$	283	$2^2 \cdot 71$	359	$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$
229^2	$3 \cdot 97 \cdot 181$	283^2	$3 \cdot 73 \cdot 367$	359^2	$7 \cdot 37 \cdot 499$
229^3	$2^2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 23 \cdot 2017$	283^3	$2^3 \cdot 5 \cdot 71 \cdot 8009$	359^3	$2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 4957$
233	$2 \cdot 3^2 \cdot 13$	293	$2 \cdot 3 \cdot 7^2$	367	$2^4 \cdot 23$
233^2	$7 \cdot 7789$	293^2	86143	367^2	$3 \cdot 13 \cdot 3463$
233^3	$2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 61 \cdot 89$	293^3	$2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 17 \cdot 101$	367^3	$2^5 \cdot 5 \cdot 23 \cdot 13469$
239	$2^4 \cdot 3 \cdot 5$	307	$2^2 \cdot 7 \cdot 11$	373	$2 \cdot 11 \cdot 17$
239^2	$19 \cdot 3019$	307^2	$3 \cdot 43 \cdot 733$	373^2	$3 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 73$
239^3	$2^5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 13^4$	307^3	$2^3 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 29$	373^3	$2^2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 17 \cdot 13913$
241	$2 \cdot 11^2$	311	$2^3 \cdot 3 \cdot 13$	379	$2^2 \cdot 5 \cdot 19$
241^2	$3 \cdot 19441$	311^2	$19 \cdot 5107$	379^2	$3 \cdot 61 \cdot 787$
241^3	$2^2 \cdot 11^2 \cdot 113 \cdot 257$	311^3	$2^4 \cdot 3 \cdot 13 \cdot 137 \cdot 353$	379^3	$2^3 \cdot 5 \cdot 19 \cdot 71821$
251	$2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$	313	$2 \cdot 157$	383	$2^7 \cdot 3$
251^2	$43 \cdot 1471$	313^2	$3 \cdot 181^2$	383^2	147073
251^3	$2^3 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 17^2 \cdot 109$	313^3	$2^2 \cdot 5 \cdot 97 \cdot 101 \cdot 157$	383^3	$2^8 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 14669$

Zahl	Teilersumme	Zahl	Teilersumme	Zahl	Teilersumme
389	$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 13$	457	$2 \cdot 229$	523	$2^2 \cdot 131$
389^2	$7 \cdot 21673$	457^2	$3 \cdot 7 \cdot 9967$	523^2	$3 \cdot 13 \cdot 7027$
389^3	$2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 29 \cdot 2609$	457^3	$2^2 \cdot 5^2 \cdot 229 \cdot 4177$	523^3	$2^3 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 131 \cdot 1609$
397	$2 \cdot 199$	461	$2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11$	541	$2 \cdot 271$
397^2	$3 \cdot 31 \cdot 1699$	461^2	$373 \cdot 571$	541^2	$3 \cdot 7 \cdot 13963$
397^3	$2^2 \cdot 5 \cdot 199 \cdot 15761$	461^3	$2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 106261$	541^3	$2^2 \cdot 13 \cdot 271 \cdot 11257$
401	$2 \cdot 3 \cdot 67$	463	$2^4 \cdot 29$	547	$2^2 \cdot 137$
401^2	$7 \cdot 23029$	463^2	$3 \cdot 19 \cdot 3769$	547^2	$3 \cdot 163 \cdot 613$
401^3	$2^2 \cdot 3 \cdot 37 \cdot 41 \cdot 53 \cdot 67$	463^3	$2^5 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 97$	547^3	$2^3 \cdot 5 \cdot 137 \cdot 29921$
409	$2 \cdot 5 \cdot 41$	467	$2^2 \cdot 3^2 \cdot 13$	557	$2 \cdot 3^2 \cdot 31$
409^2	$3 \cdot 55897$	467^2	$19 \cdot 11503$	557^2	$7^2 \cdot 6343$
409^3	$2^2 \cdot 5 \cdot 41 \cdot 83641$	467^3	$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 113 \cdot 193$	557^3	$2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 17 \cdot 31 \cdot 73$
419	$2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$	479	$2^5 \cdot 3 \cdot 5$	563	$2^2 \cdot 3 \cdot 47$
419^2	$13 \cdot 13537$	479^2	$43 \cdot 5347$	563^2	$31 \cdot 10243$
419^3	$2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 41 \cdot 2141$	489^3	$2^6 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 89 \cdot 1289$	563^3	$2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 29 \cdot 47 \cdot 1093$
421	$2 \cdot 211$	487	$2^3 \cdot 61$	569	$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 19$
421^2	$3 \cdot 59221$	487^2	$3 \cdot 7 \cdot 11317$	569^2	$7^2 \cdot 6619$
421^3	$2^2 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 211 \cdot 401$	487^3	$2^4 \cdot 5 \cdot 37 \cdot 61 \cdot 641$	569^3	$2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 19 \cdot 161881$
431	$2^4 \cdot 3^3$	491	$2^2 \cdot 3 \cdot 41$	571	$2^2 \cdot 11 \cdot 13$
431^2	$7 \cdot 67 \cdot 397$	491^2	$37 \cdot 6529$	571^2	$3 \cdot 7 \cdot 103 \cdot 151$
431^3	$2^5 \cdot 3^3 \cdot 293 \cdot 317$	491^3	$2^3 \cdot 3 \cdot 41 \cdot 149 \cdot 809$	571^3	$2^3 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 163021$
433	$2 \cdot 7 \cdot 31$	499	$2^2 \cdot 5^3$	577	$2 \cdot 17^2$
433^2	$3 \cdot 37 \cdot 1693$	499^2	$3 \cdot 7 \cdot 109^2$	577^2	$3 \cdot 19 \cdot 5851$
433^3	$2^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 31 \cdot 18749$	499^3	$2^3 \cdot 5^3 \cdot 13 \cdot 61 \cdot 157$	577^3	$2^2 \cdot 5 \cdot 13^2 \cdot 17^2 \cdot 197$
439	$2^3 \cdot 5 \cdot 11$	503	$2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$	587	$2^2 \cdot 3 \cdot 7^2$
439^2	$3 \cdot 31^2 \cdot 67$	503^2	$13 \cdot 19501$	587^2	$547 \cdot 631$
439^3	$2^4 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 173 \cdot 557$	503^3	$2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 25301$	587^3	$2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 34457$
443	$2^2 \cdot 3 \cdot 37$	509	$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 17$	593	$2 \cdot 3^3 \cdot 11$
443^2	$7 \cdot 28099$	509^2	$43 \cdot 6037$	593^2	$163 \cdot 2161$
443^3	$2^3 \cdot 3 \cdot 5^4 \cdot 37 \cdot 157$	509^3	$2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 281 \cdot 461$	593^3	$2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 541$
449	$2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$	521	$2 \cdot 3^2 \cdot 29$	599	$2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$
449^2	$97 \cdot 2083$	521^2	$31^2 \cdot 283$	599^2	$7 \cdot 51343$
449^3	$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 100801$	521^3	$2^2 \cdot 3^2 \cdot 29 \cdot 135721$	599^3	$2^4 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 17 \cdot 61 \cdot 173$

Zahl	Teilersumme	Zahl	Teilersumme	Zahl	Teilersumme
601	$2 \cdot 7 \cdot 43$	661	$2 \cdot 331$	743	$2^3 \cdot 3 \cdot 31$
601^2	$3 \cdot 13 \cdot 9277$	661^2	$3 \cdot 145861$	743^2	552793
601^3	$2^2 \cdot 7 \cdot 43 \cdot 313 \cdot 577$	661^3	$2^2 \cdot 331 \cdot 218461$	743^3	$2^4 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 31 \cdot 61 \cdot 181$
607	$2^5 \cdot 19$	673	$2 \cdot 337$	751	$2^4 \cdot 47$
607^2	$3 \cdot 13 \cdot 9463$	673^2	$3 \cdot 151201$	751^2	$3 \cdot 7 \cdot 26893$
607^3	$2^6 \cdot 5^2 \cdot 19 \cdot 7369$	673^2	$2^2 \cdot 5 \cdot 337 \cdot 45293$	751^3	$2^5 \cdot 47 \cdot 282001$
613	$2 \cdot 307$	677	$2 \cdot 3 \cdot 113$	757	$2 \cdot 379$
613^2	$3 \cdot 7 \cdot 17923$	677^2	459007	757^2	$3 \cdot 13 \cdot 14713$
613^3	$2^2 \cdot 5 \cdot 53 \cdot 307 \cdot 709$	677^3	$2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 113 \cdot 45833$	757^3	$2^2 \cdot 5^2 \cdot 73 \cdot 157 \cdot 379$
617	$2 \cdot 3 \cdot 103$	683	$2^2 \cdot 3^2 \cdot 19$	761	$2 \cdot 3 \cdot 127$
617^2	$97 \cdot 3931$	683^2	$7 \cdot 66739$	761^2	579883
617^3	$2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 103 \cdot 39069$	683^3	$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 19 \cdot 546649$	761^3	$2^2 \cdot 3 \cdot 17 \cdot 127 \cdot 17033$
619	$2^2 \cdot 5 \cdot 31$	691	$2^2 \cdot 173$	769	$2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$
619^2	$3 \cdot 19 \cdot 6733$	691^2	$3 \cdot 19 \cdot 8389$	769^2	$3 \cdot 31 \cdot 6367$
619^3	$2^3 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 31 \cdot 14737$	691^3	$2^3 \cdot 173 \cdot 193 \cdot 1237$	769^3	$2^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 17 \cdot 17393$
631	$2^3 \cdot 79$	701	$2 \cdot 3^3 \cdot 13$	773	$2 \cdot 3^2 \cdot 43$
631^2	$3 \cdot 307 \cdot 433$	701^2	492103	773^2	598303
631^3	$2^4 \cdot 79 \cdot 199081$	701^3	$2^2 \cdot 3^3 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 97 \cdot 149$	773^3	$2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 43 \cdot 59753$
641	$2 \cdot 3 \cdot 107$	709	$2 \cdot 5 \cdot 71$	787	$2^2 \cdot 197$
641^2	$7 \cdot 58789$	709^2	$3 \cdot 7 \cdot 23971$	787^2	$3 \cdot 37^2 \cdot 151$
641^3	$2^2 \cdot 3 \cdot 107 \cdot 205441$	709^3	$2^2 \cdot 5 \cdot 37 \cdot 71 \cdot 6793$	787^3	$2^3 \cdot 5 \cdot 197 \cdot 241 \cdot 257$
643	$2^2 \cdot 7 \cdot 23$	719	$2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$	797	$2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 19$
643^2	$3 \cdot 97 \cdot 1423$	719^2	$487 \cdot 1063$	797^2	$147 \cdot 4051$
643^3	$2^3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 23 \cdot 8269$	719^3	$2^5 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 53 \cdot 4877$	797^3	$2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 19 \cdot 63521$
647	$2^3 \cdot 3^4$	727	$2^3 \cdot 7 \cdot 13$	809	$2 \cdot 3^4 \cdot 5$
647^2	$211 \cdot 1987$	727^2	$3 \cdot 176419$	809^2	$7 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 379$
647^3	$2^4 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 41 \cdot 1021$	727^3	$2^4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 2109$	809^3	$2^2 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 229 \cdot 1429$
653	$2 \cdot 3 \cdot 109$	733	$2 \cdot 367$	811	$2^2 \cdot 7 \cdot 29$
653^2	$7 \cdot 13^2 \cdot 19^2$	733^2	$3 \cdot 19 \cdot 9439$	811^2	$3 \cdot 31 \cdot 73 \cdot 97$
653^3	$2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 109 \cdot 42641$	733^3	$2^2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 367 \cdot 4133$	811^3	$2^3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 41 \cdot 617$
659	$2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11$	739	$2^2 \cdot 5 \cdot 37$	821	$2 \cdot 3 \cdot 137$
659^2	$13 \cdot 33457$	739^2	$3 \cdot 7 \cdot 26041$	821^2	$7 \cdot 229 \cdot 421$
659^3	$2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 17 \cdot 53 \cdot 241$	739^3	$2^3 \cdot 5 \cdot 37 \cdot 273061$	821^3	$2^2 \cdot 3 \cdot 137 \cdot 337021$

Zahl	Teilersumme	Zahl	Teilersumme	Zahl	Teilersumme
823	$2^3 \cdot 103$	881	$2 \cdot 3^2 \cdot 7^2$	947	$2^2 \cdot 3 \cdot 79$
823^2	$3 \cdot 7 \cdot 43 \cdot 751$	881^2	$19 \cdot 40897$	947^2	$7 \cdot 277 \cdot 463$
823^3	$2^4 \cdot 5 \cdot 103 \cdot 67733$	881^3	$2^2 \cdot 3^2 \cdot 7^2 \cdot 388081$	947^3	$2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 79 \cdot 89681$
827	$2^2 \cdot 3^2 \cdot 23$	883	$2^2 \cdot 13 \cdot 17$	953	$2 \cdot 3^2 \cdot 53$
827^2	684757	883^2	$3 \cdot 260191$	953^2	$181 \cdot 5023$
927^3	$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 23 \cdot 5261$	883^3	$2^3 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 77969$	953^3	$2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 53 \cdot 90821$
829	$2 \cdot 5 \cdot 83$	887	$2^3 \cdot 3 \cdot 37$	967	$2^3 \cdot 11^2$
829^2	$3 \cdot 211 \cdot 1087$	887^2	$13 \cdot 60589$	967^2	$3 \cdot 67 \cdot 4657$
829^3	$2^2 \cdot 5 \cdot 17^2 \cdot 29 \cdot 41 \cdot 83$	887^3	$2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 29 \cdot 37 \cdot 2713$	967^3	$2^4 \cdot 5 \cdot 11^2 \cdot 13 \cdot 7193$
839	$2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$	907	$2^2 \cdot 227$	871	$2^2 \cdot 3^5$
839^2	704761	907^2	$3 \cdot 7 \cdot 39217$	971^2	$13 \cdot 79 \cdot 919$
839^3	$2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 109 \cdot 3229$	907^3	$2^3 \cdot 5^2 \cdot 227 \cdot 16453$	971^3	$2^3 \cdot 3^5 \cdot 197 \cdot 2393$
853	$2 \cdot 7 \cdot 61$	911	$2^4 \cdot 3 \cdot 19$	977	$2 \cdot 3 \cdot 163$
853^2	$3 \cdot 43 \cdot 5647$	911^2	830833	977^2	$7 \cdot 136501$
853^3	$2^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 29 \cdot 61 \cdot 193$	911^3	$2^5 \cdot 3 \cdot 19 \cdot 29 \cdot 41 \cdot 349$	977^3	$2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 53 \cdot 163 \cdot 1801$
857	$2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 13$	919	$2^3 \cdot 5 \cdot 23$	983	$2^3 \cdot 3 \cdot 41$
857^2	735307	919^2	$3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 163$	983^2	$102 \cdot 9391$
857^3	$2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37 \cdot 397$	919^3	$2^4 \cdot 5 \cdot 23 \cdot 37 \cdot 101 \cdot 113$	983^2	$2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 41 \cdot 7433$
859	$2^2 \cdot 5 \cdot 43$	929	$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 31$	991	$2^5 \cdot 31$
859^2	$3 \cdot 246247$	929^2	$157 \cdot 5503$	991^2	$3 \cdot 7 \cdot 13^2 \cdot 277$
859^3	$2^3 \cdot 5 \cdot 43 \cdot 137 \cdot 2693$	929^3	$2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 31 \cdot 431521$	991^3	$2^6 \cdot 31 \cdot 491041$
863	$2^3 \cdot 3^3$	937	$2 \cdot 7 \cdot 67$	997	$2 \cdot 499$
863^2	$7^2 \cdot 15217$	937^2	$3 \cdot 292969$	997^2	$3 \cdot 13 \cdot 31 \cdot 823$
863^3	$2^6 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 337$	937^3	$2^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 67 \cdot 87797$	997^3	$2^2 \cdot 5 \cdot 499 \cdot 99401$
877	$2 \cdot 439$	941	$2 \cdot 3 \cdot 157$		
877^2	$3 \cdot 7 \cdot 37 \cdot 991$	941^2	$811 \cdot 1093$		
877^3	$2^2 \cdot 5 \cdot 439 \cdot 76913$	941^3	$2^2 \cdot 3 \cdot 13 \cdot 157 \cdot 34057$		

SCHOLION

§14 Der Nutzen dieser Tabelle ist sehr weitreichend beim Auflösen von Fragen über die Teiler und echten Teiler. Denn mit ihrer Hilfe kann die Summe der Teiler einer jeden vorgelegten Zahl ohne Mühe gefunden werden; nachdem diese gefunden worden ist, wenn davon die vorgelegte Zahl selbst weggenommen wird, wird die Summe seiner echten Teiler zurückbleiben. Daraus ist sofort klar, dass mit Hilfe dieser Tabelle die befreundeten Zahlen, welche ich angeben werde, leicht ermittelt werden können, ob sie tatsächlich solche sind oder nicht. Wie aber vermöge dieser Tabelle die Summe der Teiler einer jeden Zahl erkannt werden kann, werde ich im folgenden Lemma erläutern.

LEMMA 3

§15 *Nachdem eine beliebige Zahl vorgelegt worden ist, wird die Summe ihrer Teiler auf die folgende Weise berechnet.*

Weil jede Zahl entweder prim oder das Produkt aus Primzahlen ist, löse man die vorgelegte Zahl in ihre Primfaktoren auf und, die unter ihnen gleich waren, drücke man zusammengefasst aus. Auf diese Weise wird die vorgelegte Zahl immer auf eine Form dieser Art gebracht werden $m^\alpha \cdot n^\beta \cdot p^\gamma \cdot q^\delta \cdot$ etc., während m, n, p, q etc. Primzahlen sind. Weil also, nachdem eine Zahl $= N$ vorgelegt worden ist, $N = m^\alpha \cdot n^\beta \cdot p^\gamma \cdot q^\gamma \cdot$ etc. ist und die Faktoren m^α, n^β, p^γ, q^δ zueinander prim sind, wird $\int N = \int m^\alpha \cdot \int n^\beta \cdot \int p^\gamma \cdot \int q^\delta \cdot$ etc. sein und die Werte $\int m^\alpha$, $\int n^\beta$, $\int p^\gamma$, q^δ etc. werden aus der beigefügten Tabelle klar werden.

BEISPIEL 1

Es sei die Zahl $N = 360$ vorgelegt.

Nachdem diese Zahl in ihre Primfaktoren aufgelöst worden ist, wird $N = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$ und daher

$$\int 360 = \int 2^3 \cdot \int 3^2 \cdot \int 5 = 3 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 2 \cdot 3$$

sein, wegen $\int 2^3 = 3 \cdot 5$, $\int 3^2 = 13$, $\int 5 = 2 \cdot 3$. Daher wird nach Ordnen dieser Faktoren

$$\int 360 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 13 = 1170$$

werden.

Beispiel 2

Man untersuche die Zahlen 2620 *und* 2924*, ob sie befreundet sind oder nicht.*

Weil $2620 = 2^2 \cdot 5 \cdot 131$ und $2924 = 2^2 \cdot 17 \cdot 43$ ist, stelle man die Untersuchung so an:

Vorgelegte Zahlen	2620	2924
In Faktoren ausgedrückt	$2^2 \cdot 5 \cdot 131$	$2^2 \cdot 17 \cdot 43$
Teilersumme	$7 \cdot 6 \cdot 132$	$7 \cdot 18 \cdot 44$
oder	5544	5544
Summe der echten Teiler	2924	2620

Weil also die Summen der echten Teiler den Zahlen reziprok gleich sind, ist klar, dass die vorgelegten Zahlen befreundet sind.

Scholion

§16 Nachdem also diese Dinge vorausgeschickt worden sind, die sich auf das Finden der Teiler einer jeden Zahl beziehen, möchte ich das Problem über die Untersuchung von befreundeten Zahlen angehen und ich werde erforschen, wie sich Zahlen von dieser Art in Bezug auf die Teilersummen zueinander verhalten müssen, damit danach leichter das Finden derer nach anzugebenden Regeln in Angriff genommen werden kann.

Allgemeines Problem

§17 *Befreundete Zahlen zu finden, das heißt, zwei Zahlen von dieser Gestalt, dass die eine der Summe der echten Teiler der anderen gleich ist.*

LÖSUNG

Es seien m und n zwei befreundete Zahlen von dieser Art und nach der Annahme $\int m$ und $\int n$ die Summen der Teiler derselben. Die Summe der echten Teiler der Zahl m wird $= \int m - m$ sein und die Summe der echten Teiler der Zahl n wird $= \int n - n$ sein. Daher werden aus der Natur der befreundeten Zahlen diese zwei Gleichungen entstehen

$$\int m - m = n \quad \text{und} \quad \int n - n = m$$

oder

$$\int m = \int n = m + n.$$

Also müssen die befreundeten Zahlen m und n zuerst diese Summe an Teilern haben, dann ist es aber vonnöten, dass diese gemeinsame Summe an Teilern gleich dem Aggregat der Zahlen $m + n$ ist.

KOROLLAR 1

§18 Das Problem wird also darauf zurückgeführt, dass zwei Zahlen von solcher Art gesucht werden, die dieselbe Summe an Teilern haben und diese gleich dem Aggregat der Zahlen selbst ist.

KOROLLAR 2

§19 Die Natur des Problems selbst verlangt, dass die zwei gesuchten Zahlen einander ungleich sind. Wenn sie aber als gleich verlangt werden, dass $m = n$ ist, wird $\int n = 2n$ und $\int n - n = n$ werden; natürlich wird die Summe der echten Teiler der doppelten Zahl n selbiger gleich werden, welches die Eigenschaft einer vollkommenen Zahl ist. Also wird jede perfekte Zahl wiederholt befreundete Zahlen darbieten.

KOROLLAR 3

§20 Wenn aber die befreundeten Zahlen m und n, wie es die Natur der Frage verlangt, ungleich sind, ist es offenkundig, dass die eine abundant ist, die andere defizient; die Summe der echten Teiler der einen wird größer als sie sein, die der anderen hingegen kleiner als selbige.

Korollar 4

§21 Aus dieser allgemeinen Eigenschaft erfahren wir einiges an Hilfe, um befreundete Zahlen zu finden, weil ja dieser Teil der Analysis, mit dessen Hilfe sich die Gleichung $\int m = \int n = m + n$ auslösen lässt, immer noch völlig unentwickelt ist. Dieses Mangels wegen sind wir gezwungen speziellere Formeln zu betrachten, aus deren Natur sich spezielle Regeln für das Finden von befreundeten Zahlen ableiten lassen; darauf bezieht sich die Descartes'sche von Schoten erwähnte Regel. Und freilich möchte ich zuerst, auch wenn es nicht bekannt ist, ob befreundete Zahlen unter den zueinander teilerfremden gegeben sind oder nicht, die allgemeinen Formeln so einschränken, dass die befreundeten Zahlen einen gemeinsamen Faktor erhalten.

Partikuläres Problem

§22 *Die Natur der befreundeten Zahlen zu finden, die einen gemeinsamen Faktor haben.*

Lösung

Es sei a der gemeinsame Faktor der befreundeten Zahlen, von welchen die eine $= am$, die andere $= an$ gesetzt werde; es seien aber so m und a wie n und a zueinander teilerfremde Zahlen, dass die Summe der Teiler jeder der beiden nach den gegebenen Regeln gefunden werden kann. Weil also zuerst die Teilersumme jeder der beiden dieselbe sein muss, wird $\int a \cdot \int m = \int a \cdot \int n$ werden und daher

$$\int m = \int n.$$

Darauf ist es aber notwendig, dass $\int a \cdot \int m$ oder $\int a \cdot \int n$ dem Aggregat $am + an$ der Zahlen gleich ist, woher man

$$\frac{a}{\int a} = \frac{\int m}{m+n} = \frac{\int n}{m+n}$$

hat. Nachdem also die Zahlen am und an als befreundet festgelegt worden sind, ist es zuerst nötig, dass $\int m = \int n$ ist, dann wird aber verlangt, dass $a(m+n) = \int a \cdot \int m$ ist.

Korollar 1

§23 Wenn also für m und n schon Zahlen von solcher Art gefunden worden sind, dass $\int m = \int n$ ist, dann muss die Zahl a ausfindig gemacht werden, dass $\frac{a}{\int a} = \frac{\int m}{m+n}$ ist, oder aus dem Verhältnis, welches die Zahl zur Summe ihrer Teiler haben muss, wird die Zahl a selbst ausfindig zu machen sein.

Korollar 2

§24 Wenn der gemeinsame Faktor a gegeben war, wird die Frage auf das Finden der zahlen m und n zurückgeführt, die – ob prim oder zusammengesetzt – aus zwei oder mehreren teilerfremden Teilen zusammengesetzt angenommen werden; weil ja dann die Summen der Teiler tatsächlich dargeboten werden können, werden die spezielle Regeln, um sie zu finden, angegeben werden können.

Korollar 3

§25 Sofort wird aber erkannt, dass nicht jede der beiden Zahlen m und n prim sein kann; daher ist der einfachste Fall, wenn die eine prim ist, die andere hingegen als Produkt aus zwei Primzahlen angenommen wird. Dann wird jede der beiden als Produkt aus zwei oder mehreren primen Zahlen festgelegt werden können, woher es möglich sein wird, unzählige spezielle Regeln für das Finden von befreundeten Zahlen abzuleiten.

Scholion

§26 Also werden verschiedene Formen von befreundeten Zahlen, die daraus entstehen, auf die folgende Weise dargestellt werden können. Es sei a der gemeinsame Faktor und p, q, r, s etc. Primzahlen, von denen keine ein Teiler des gemeinsamen Faktors a ist, und die Formen der befreundeten Zahlen werden sein:

$$\text{erste Form} \quad \begin{cases} apq \\ ar \end{cases} \quad \text{zweite Form} \quad \begin{cases} apq \\ ars \end{cases}$$

$$\text{dritte Form} \quad \begin{cases} apqr \\ as \end{cases} \quad \text{vierte Form} \quad \begin{cases} apqr \\ ast \end{cases} \quad \text{fünfte Form} \quad \begin{cases} apqr \\ astu \end{cases}$$

etc.

Obwohl die Anzahl dieser Formen ins Unendliche vermehrt werden kann, lässt sich daraus dennoch keinesfalls folgern, dass in diesen Formeln alle befreundeten Zahlen enthalten sind. Denn zuerst, während hier die Buchstaben p, q, r, s, t etc. verschiedene Primzahlen bedeuten, ist unwahrscheinlich, dass keine befreundeten Zahlen gegeben sind, in denen keine Potenzen derselben Primzahl auftauchen. Desweiteren ist gleichermaßen unbekannt, ob nicht befreundete Zahlen gegeben sind, die entweder keinen gemeinsamen Faktor a haben, oder in denen dieser Faktor nicht völlig derselbe ist, wie wenn zwei befreundete Zahlen von dieser Form $m^{\alpha}P$ und $m^{\beta}Q$ gegeben wären, in denen die Exponenten α und β dann verschieden sind, welche Form deshalb nicht in den obigen Formen enthalten wäre, auch wenn P und Q Produkte aus lediglich einander verschiedenen Primzahlen wären. Aus diesen Erläuterungen erkennt man also, dass die Frage über befreundete Zahlen sich sehr weit erstreckt und deswegen so schwierig ist, dass eine vollständige Lösung kaum zu erwarten ist. Ich werde mich also nur auf spezielle Lösungen beschränken und verschiedene Methoden eröffnen, mit deren Hilfe es mir möglich war, aus den angegebenen Formeln viele befreundete Zahlen zu finden. Aber jede beliebige Form hat mir zwei Methoden an die Hand gegeben, je nachdem ob der gemeinsame Faktor a als gegeben angenommen wird oder selbst gesucht wird; und diese Methoden werde ich in den folgenden Problemen erläutern.

Problem 1

§27 *Befreundete Zahlen der ersten Form apq und ar zu finden, wenn der gemeinsame Faktor a gegeben ist.*

Lösung

Weil p, q und r Primzahlen sind und $\int r = \int p \cdot \int q$ oder

$$r + 1 = (p+1)(q+1)$$

ist, setze man $p+1 = x$ und $q+1 = y$ und es wird $r = xy - 1$ werden. Und daher müssen x und y Zahlen von solcher Art sein, dass so $x-1$ wie $y-1$ wie $xy-1$ Primzahlen sind. Damit dann $a(x-1)(y-1)$ und $a(xy-1)$ befreundete Zahlen sind, ist es vonnöten, dass deren Aggregat $a(2xy-x-y)$

gleich der Summe der Teiler der einen der beiden $xy \int a$ ist; daher erlangen wir diese Gleichung

$$xy \int a = 2axy - ax - ay \quad \text{oder} \quad y = \frac{ax}{(2a - \int a)x - a}.$$

Es sei der Kürze wegen $\frac{a}{2a - \int a} = \frac{b}{c}$ und $\frac{b}{c}$ sei der Wert des maximal gekürzten Bruchs $\frac{a}{2a - \int a}$ und es wird

$$y = \frac{bx}{cx - b} \quad \text{oder} \quad cy = \frac{bcx}{cx - b} = b + \frac{bb}{cx - b}$$

sein, woher wir

$$(cx - b)(cy - b) = bb$$

haben werden. Weil also $cx - b$ und $cy - b$ die Faktoren von bb sind, muss das bekannte Quadrat bb in zwei Faktoren von solcher Art aufgelöst werden, von welchen beide um die Zahl b vermehrt durch c teilbar werden und die daraus hervorgehenden Quotienten x und y so beschaffen sind, dass $x - 1$, $y - 1$ und $xy - 1$ Primzahlen werden. Sooft diese Bedingung erfüllt werden kann, was freilich für einen bestimmten angenommenen Wert von a sofort erkannt wird, so oft wird man befreundete Zahlen erlangen, welche $a(x - a)(y - 1)$ und $a(xy - 1)$ sein werden.

Korollar

§28 Je nachdem, ob also für a die einen oder die anderen Zahlen angenommen werden, woraus die Werte b und c bekannt werden, werden spezielle Regeln erwachsen, mit deren Hilfe befreundete Zahlen, wenn sie in dieser Art gegeben sind, leicht gefunden werden.

Regel 1

§29 Der gemeinsame Faktor a sei irgendeine Potenz von zwei, also $a = 2^n$; es wird $\int a = 2^{n+1} - 1$ sein und daher $2a - \int a = 1$, woher $\frac{a}{2a - \int a} = 2^n$ und daher $b = 2^n$ und $c = 1$ sein wird. Daher entspringt

$$(x - 2^n)(y - 2^n) = 2^{2n}.$$

Daher, weil 2^{2n} keine anderen Faktoren hat als die Faktoren von 2, wird

$$x - 2^n = 2^{n+k}, \quad y - 2^n = 2^{n-k}$$

oder

$$x = 2^{n+k} + 2^n, \quad y = 2^{n-k} + 2^n.$$

Deshalb ist zu sehen, ob ein Wert solcher Art für k gegeben ist, dass die folgenden drei Zahlen

$$x - 1 = 2^{n+k} + 2^n - 1, \quad y - 1 = 2^{n-k} + 2^n - 1,$$
$$xy - 1 = 2^{2n+1} + 2^{2n+k} + 2^{2n-k} - 1$$

Primzahlen werden. Wenn dies gelingt, werden die befreundeten Zahlen

$$2^n(2^{n+k} + 2^n - 1)(2^{n-k} + 2^n - 1), \quad 2^n(2^{2n+1} + 2^{2n+k} + 2^{2n-k} - 1)$$

sein. Oder es sei $n - k = m$ oder $n = m + k$ und es wird

$$x - 1 = 2^m(2^{2k} + 2^k) - 1 = q, \quad y - 1 = 2^m(1 + 2^k) - 1 = p,$$
$$xy - 1 = 2^{2m}(2^{2k+1} + 2^{3k} + 2^k) - 1 = r$$

werden, welche Zahlen, sooft sie prim waren, befreundete Zahlen liefern werden.

Fall 1

§30 Es sei $k = 1$ und es werden befreundete Zahlen erhalten werden, sooft die drei folgenden Zahlen prim waren

$$3 \cdot 2^m - 1, \quad 6 \cdot 2^m - 1 \quad \text{und} \quad 18 \cdot 2^{2m} - 1$$

waren. Denn dann werden nach Setzen von

$$p = 3 \cdot 2^m - 1, \quad q = 6 \cdot 2^m - 1 \quad \text{und} \quad r = 18 \cdot 2^{2m} - 1$$

die Zahlen

$$2^{m+1}pq \quad \text{und} \quad 2^{m+1}r$$

prim sein, wegen $n = m + k = m + 1$. Und dies ist die von Descartes und Schoten angegebene Regel.

Beispiel 1

§31 Es sei $m = 1$ und es wird sich wie folgt verhalten:

$$\begin{aligned} p &= 3 \cdot 2 - 1 = 5 \quad \text{eine Primzahl,} \\ q &= 6 \cdot 2 - 1 = 11 \quad \text{eine Primzahl,} \\ r &= 18 \cdot 4 - 1 = 71 \quad \text{eine Primzahl.} \end{aligned}$$

Daher entspringen also die befreundeten Zahlen

$$2^2 \cdot 5 \cdot 11 \quad \text{und} \quad 2^2 \cdot 71 \quad \text{oder} \quad 220 \quad \text{und} \quad 284,$$

welches die kleinsten von allen sind, die dargeboten werden können.

Beispiel 2

§32 Es sei $m = 2$ und es wird $2^m = 4$ und $2^{2m} = 16$ sein sowie

$$\begin{aligned} p &= 3 \cdot 4 - 1 = 11 \quad \text{eine Primzahl,} \\ q &= 6 \cdot 4 - 1 = 23 \quad \text{eine Primzahl,} \\ r &= 18 \cdot 16 - 1 = 287 \quad \text{keine Primzahl;} \end{aligned}$$

und daher entspringen keine befreundeten Zahlen.

Beispiel 3

§33 Es sei $m = 3$ und es wird $2^m = 8$ und $2^{2m} = 64$ sein sowie

$$\begin{aligned} p &= 3 \cdot 8 - 1 = 23 \quad \text{eine Primzahl,} \\ q &= 6 \cdot 8 - 1 = 63 \quad \text{eine Primzahl,} \\ r &= 18 \cdot 64 - 1 = 1151 \quad \text{eine Primzahl.} \end{aligned}$$

Also werden daraus die Zahlen

$$2^4 \cdot 23 \cdot 47 \quad \text{und} \quad 2^4 \cdot 1151 \quad \text{oder} \quad 17296 \quad \text{und} \quad 18416$$

befreundet sein.

§34 Diese Beispiele werden mit den folgenden, in denen dem Exponenten m größere Werte zugeteilt werden, gefälliger auf einen Blick so dargestellt werden können:

Für $m =$ 1	2	3	4	5	6	7	8
ist $p =$ 5	11	23	47	95*	191	383	767*
$q =$ 11	23	47	95*	191	383	767*	1535*
$r =$ 71	287*	1151	4607*	18431*	73727	294911	1179647*

Hier sind die mit Stern markierten Zahlen keine Primzahlen; daher werden daraus nur drei befreundete Zahlen erhalten, nämlich

$$\text{I.}\ \begin{cases} 2^2 \cdot 5 \cdot 11 \\ 2^2 \cdot 71 \end{cases} \quad \text{II.}\ \begin{cases} 2^4 \cdot 23 \cdot 47 \\ 2^4 \cdot 1151 \end{cases} \quad \text{III.}\ \begin{cases} 2^7 \cdot 191 \cdot 383 \\ 2^7 \cdot 73727. \end{cases}$$

Es lässt sich aber nicht weiter fortschreiten, weil die Werte von r allzu groß werden, als dass erkannt werden kann, ob die Zahlen prim sind oder nicht. Denn die bisher erstellten Primzahltabellen schreiten kaum weiter als 10000 vor.

FALL 2

§35 Es sei $k = 2$ und die Werte der Buchstaben p, q, r, welche prim sein müssen, werden

$$p = 5 \cdot 2^m - 1, \quad q = 20 \cdot 2^m - 1, \quad r = 100 \cdot 2^{2m} - 1$$

sein; weil deren letzte wegen $2^{2m} = 3\alpha + 1$ und $r = 300\alpha + 99$ immer durch drei teilbar ist, folgen daraus keine befreundeten Zahlen.

FALL 3

§36 Man setze $k = 3$ und es wird

$$p = 9 \cdot 2^m - 1, \quad q = 72 \cdot 2^m - 1, \quad r = 648 \cdot 2^{2m} - 1$$

sein; weil keine von diesen erscheint notwendigerweise einen Teiler zuzulassen, werde ich die Werte von p, q, r, die aus den einfacheren Werten von m entspringen, hier zusammen darstellen:

Für $m =$ 1	2	3	4	5
ist $p =$ 17	35^*	71	143^*	287^*
$q = 143^*$	287^*	575^*	1151	2303^*
$r = 2591$	10367^*	41471^*	165887^*	663551^*

Daher findet man also, weil sich nicht weiter fortschreiten lässt, keine befreundeten Zahlen.

FALL 4

§37 Man setze $k = 4$ und die folgenden drei Zahlen werden Pimzahlen sein müssen

$$p = 17 \cdot 2^m - 1, \quad q = 272 \cdot 2^m - 1, \quad r = 4624 \cdot 2^{2m} - 1.$$

Weil hier r immer ein Vielfaches von drei ist, ist klar, dass daraus keine befreundeten Zahlen hervorgehen.

FALL 5

§38 Man setze $k = 5$ und die folgenden drei Zahlen werden prim sein müssen

$$p = 33 \cdot 2^m - 1, \quad q = 1056 \cdot 2^m - 1, \quad r = 34848 \cdot 2^{2m} - 1.$$

Hier ist sofort klar, dass der Fall $m = 1$ unbrauchbar ist, weil er $p = 65$ gibt. Es sei also $m = 2$ und es wird $p = 131$, $q = 4223^*$, $r = 557567$ werden; weil hier q keine Primzahl ist und größere Werte für m wegen des Mangels an Primzahltabellen keiner Untersuchung unterworfen werden können, werden auch daraus keine neuen befreundeten Zahlen gefunden. Aber desselben Grundes wegen lassen auch k keine größeren Werte zuteilen.

SCHOLION

§39 Weil die Potenzen von zwei für a den Wert von c im Bruch $\frac{b}{c} = \frac{a}{2a-\int a}$ der Einheit gleich machen und sich daher Lösungen erhalten lassen, möchte ich andere Werte für a, die c gleichermaßen den eine Wert $= 1$ aufzwingen, festlegen. Unter diesen sind aber besonders die zu bemerken, die aus der Form $a = 2^n(2^{n+1} + e)$ entstehen, wenn freilich $2^{n+1} + e$ eine Primzahl ist; dann wird nämlich

$$2a - \int a = e + 1 \quad \text{und} \quad \frac{b}{c} = \frac{2^n(2^{n+1} + e)}{e + 1};$$

wenn also $e + 1$ ein Teiler des Zählers $2^n(2^{n+1} + e)$ ist, wird der Wert von c ebenso $= 1$ werden.

REGEL 2

§40 Der gemeinsame Faktor sei $a = 2^n(2^{n+1} + 2^k - 1)$, aber $2^{n+1} + 2^k - 1$ eine Primzahl; wegen $e + 1 = 2^k$ wird der Bruch $\frac{b}{c} = \frac{2^n(2^{n+1}+2^k-1)}{2^k} = 2^{n-k}(2^{n+1} + 2^k - 1)$ sein, wenn freilich nicht $k > n$ ist. Mit dieser Annahme werden wir also

$$b = 2^{n-k}(2^{n+1} + 2^k - 1) \quad \text{und} \quad c = 1$$

haben. Also ist das Quadrat bb in zwei Faktoren von solcher Art $(x - b)(y - b)$ aufzulösen, aus denen nicht nur die Werte der Zahlen $x - 1 = p$ und $y - 1 = q$, sondern auch $xy - 1 = r$ Primzahlen werden. Wenn sich Fälle von solcher Art finden lassen, werden die Zahlen apq und ar befreundet sein. Aber hier ist zu bemerken, dass diese Fälle zu verwerfen sind, in denen eine der Primzahlen p, q, als Teiler von a oder gleich $2^{n+1} - 2^k - 1$ resultiert, weil a durch keinen andere Primzahl teilbar ist.

Es sei $n - k = m$ oder $n = m + k$; es wird

$$a = 2^{m+k}(2^{m+k+1} + 2^k - 1) \quad \text{und} \quad b = 2^m(2^{m+k+1} + 2^k - 1)$$

sein. Weil nun $2^{m+k+1} - 1$ eine Primzahl sein muss, setze man

$$2^{m+k+1} + 2^k - 1 = f \quad \text{oder} \quad f = 2^k(2^{m+1} + 1) - 1,$$

dass

$$a = 2^{m+k}f \quad \text{und} \quad b = 2^m f$$

ist; es wird

$$bb = 2^{2m}ff = (x-b)(y-b)$$

sein. Denn nun wird wegen der Primzahl f die Zahl $2^{2m}ff$ auf zwei Weisen im Allgemeinen in zwei Faktoren aufgelöst.

Auf diese erste Art wird

$$(x-b)(y-b) = 2^{m-\alpha}f \cdot 2^{m+\alpha}f$$

werden und daher

$$\begin{aligned} x &= 2^{m-\alpha}f + 2^m f, & y &= 2^{m+\alpha}f + 2^m f, \\ p &= (2^{m-\alpha} + 2^m)f - 1, & q &= (2^{m+\alpha} + 2^m)f - 1 \end{aligned}$$

und

$$r = (2^{2m+1} + 2^{2m+\alpha} + 2^{2m-\alpha})ff - 1,$$

welche drei Zahlen p, q, r prim sein müssen.

Auf die zweite Weise wird die Auflösung so geschehen

$$(x-b)(y-b) = 2^{m\mp\alpha}ff + 2^{m\mp\alpha}ff,$$

woher

$$\begin{aligned} x &= 2^{m\pm\alpha}f + 2^m f, & y &= 2^{m\mp\alpha}f + 2^m f, \\ p &= 2^{m\pm\alpha} + 2^m f - 1, & q &= (2^{m\mp\alpha} + 2^m)f - 1 \end{aligned}$$

und

$$r = (2^{2m+1}f + 2^{2m\pm\alpha} + 2^{2m\mp\alpha}ff)f - 1$$

wird, und sooft p, q, r auf diese Weise also Primzahlen hervorgehen, entspringen daraus die befreundeten Zahl apq und ar.

Fall 1

§41 Es sei $k = 1$; es wird $a = 2^{m+1}(2^{m+2}+1)$, $b = 2^m(2^{m+2}+1)$ sowie $f = 2^{m+2}+1$ sein, welche Zahl eine Primzahl sein muss. Weil also $(x-b)(y-b) = 2^{2m}ff$, wird es sein wie folgt:

entweder	oder
$p = (2^{m-\alpha}+2^m)f-1,$	$p = 2^{m\pm\alpha}+2^m f-1,$
$q = (2^{m+\alpha}+2^m)f-1,$	$q = (2^{m\mp\alpha}f+2^m)f-1,$
$r = (2^{2m+1}+2^{2m+\alpha}+2^{2m-\alpha})ff-1,$	$r = (2^{2m+1}f+2^{2m\pm\alpha}+2^{2m\pm\alpha}ff)f-1.$

Es ist aber zu bemerken, damit $2^{m+2}+1$ eine Primzahl ist, dass es notwendig ist, dass $m+2$ eine Potenz von zwei ist; also werden die Werte von m entsprechend 0, 2, 6, 14 etc. sein. Aber der Fall $m = 0$ muss verworfen werden, weil der Wert von α nicht angegeben werden kann.

Beispiel 1

§42 Es sei also $m = 2$, dass $a = 8 \cdot 17$ und $b = 4 \cdot 17 = 68$ sowie $f = 17$ ist. Weil also $(x-b)(y-b) = 4^2 \cdot 17^2$ sein muss, wird es nach der Auflösung in Faktoren sein wie folgt:

$x-68=$	2	4	8	34
$y-68=$	$8 \cdot 17^2$	1156	578	136
$x=$	70	72	76	102
$y=$	2380	1224	646	204
$p=$	69*	71	75*	101
$q=$	2379*	1223	645*	203*
$r=$	166599*	88127*	49095*	20807

Daraus werden also keinen befreundeten Zahlen erhalten.

Beispiel 2

§43 Es sei $m = 6$, dass $a = 2^7 \cdot 257$, $b = 2^6 \cdot 257$ und $f = 257$ ist. Weil also $(x - b)(y - b) = 2^{12} \cdot 257^2$ ist, wird die Auflösung so durchgeführt werden müssen:

$$
\begin{array}{r|r}
x - 16448 = & 32 \cdot 257 \\
y - 16448 = & 128 \cdot 257 \\
x = & 24672 \\
y = & 49344 \\
p = & 24671 \\
q = & 49343^* \\
r = & \cdots
\end{array}
$$

Die übrigen Fälle

§44 Weil $f = 2^{m+k+1} + 2^k - 1$ eine Primzahl sein muss, wollen wir zuerst einfachere Fälle suchen, in denen das passiert, weil allzu verwickelte Fälle sich nicht entwickeln lassen. Es sei also $k = 2$ und wegen $f = 2^{m+3} + 3$ werden geeignete Werte für m auch 1, 3, 4 sein. Es sei $k = 3$; es wird $f = 2^{m+4} + 7$ sein und geeignete Werte für m werden daher 2, 4, 6 sein. Im Fall $k = 4$ ist $f = 2^{m+5} + 15$ und m wird entweder 1 oder 3 sein; und weiter lässt sich nicht fortschreiten.

Beispiel 1

§45 Wir wollen also $k = 2$ und $m = 1$ setzen, es wird $f = 19$ und $a = 8 \cdot 19$ sein und daher $b = 2 \cdot 19 = 38$, woher $(x - 38)(y - 38) = 2^2 \cdot 19^2 = 1444$ werden wird, und die Auflösung wird geben:

$x - 38 =$	2	4	
$y - 38 =$	722	361	Natürlich kann keiner der beiden Faktoren
$x =$	40		ungerade angenommen werden.
$y =$	760	unm.	
$p =$	39*		

Weil hier schon p nicht prim ist, ist klar, dass daraus keine befreundeten Zahlen resultieren.

BEISPIEL 2

§46 Wir wollen $k = 2$ und $m = 3$ setzen, dass $f = 67$ ist; es wird $a = 32 \cdot 67$ und $b = 8 \cdot 67 = 536$ sein, woher $(x - 536)(y - 536) = 2^6 \cdot 67^2$ sein wird.

$x - 536 =$	268	16	
$y - 536 =$	1072	17956	Die übrigen Werte für p liefern durch
$x =$	804	552	3 teilbare Zahlen, welche ich deshalb weggelassen habe. Die
$y =$	1608	$\cdots$	folgenden Beispiele führen zu allzu großen Zahlen.
$p =$	803*	551*	
$q =$	1607	$\cdots$	

REGEL 3

§47 Es sei wie zuvor $a = 2^n(2^{n+1} + 2^k - 1)$ und $2^{n+1} + 2^k - 1 = f$ eine Primzahl, aber im Bruch $\frac{b}{c} = \frac{2^n(2^{n+1}+2^k-1)}{2^k}$ sei $k > n$ und es wird

$$b = 2^{n+1} + 2^k - 1 \quad \text{und} \quad c = 2^{k-n}$$

sein. Wir wollen $k - n = m$ setzen, dass $k = m + n$ ist; es wird

$$a = 2^n(2^{n+1} + 2^{m+n} - 1), \quad b = 2^{n+1} + 2^{m+n} - 1 = f \quad \text{und} \quad c = 2^m$$

sein, woher man diese Gleichung haben wird

$$(2^m x - b)(2^m y - b) = bb.$$

Weil aber $b = f$ eine Primzahl ist, findet keine andere Auflösungen einen Platz außer $1 \cdot bb$, aus welcher

$$x = \frac{1+b}{2^m} \quad \text{und} \quad y = \frac{b(1+b)}{2^m}$$

oder

$$x = 2^n + 2^{n+1-m} \quad \text{und} \quad y = (2^{n+1} + 2^{m+n} - 1)(2^n + 2^{n+1-m})$$

wird. Nun ist zu bemerken, dass diese vier Zahlen prim sein müssen

$$f = 2^{n+1} + 2^{m+n} - 1, \quad p = x - 1, \quad q = y - 1 \quad \text{und} \quad r = xy - 1$$

und es notwendig, dass $m < n + 1$ ist. Wenn diesen Bedingungen Genüge geleistet wird, werden die Zahlen apq und ar befreundet sein.

FALL 1

§48 Es sei $m = 1$; es wird $f = 2^{n+2} - 1$, $x = 2^{n+1}$ und $p = 2^{n+1} - 1$ sein; es kann aber nicht passieren, dass zugleich f und p eine Primzahl sind, außer im Fall $n = 1$, in welchem aber $q = 27$ wird. Also entspringen aus der Annahme $m = 1$ keine befreundeten Zahlen.

FALL 2

§49 Es sei also $m = 2$, dass

$$f = 3 \cdot 2^{n+1} - 1, \quad x = 3 \cdot 2^{n-1} - 1 \quad \text{und} \quad y = 3 \cdot 2^{n-1}(3 \cdot 2^{n+1} - 1) - 1 \quad \text{sowie} \quad a = 2^n \cdot f$$

ist. Also müssen die vier folgenden Zahlen prim sein

$$f = 3 \cdot 2^{n+1} - 1, \quad p = 3 \cdot 2^{n-1} - 1, \quad q = 3 \cdot 2^{n-1}(3 \cdot 2^{n+1} - 1) - 1$$

und

$$r = 9 \cdot 2^{2n-2}(3 \cdot 2^{n+1} - 1) - 1,$$

woraus diese Beispiele gebildet werden:

$n =$	1	2	3	4	5
$f =$	11	23	47	95*	191
$p =$	2	5	11	...	47
$q =$	32*	137	563	...	9167*
$r =$	98*	827	6767*	...	...

und daher entstehen aus $n = 2$ und $a = 4 \cdot 23$ die befreundeten Zahlen

$$\begin{cases} 4 \cdot 23 \cdot 5 \cdot 137 \\ 4 \cdot 23 \cdot 827. \end{cases}$$

Die übrigen Fälle

§50 Wenn $m = 3$ ist, wird wiederum entweder f oder p durch 3 teilbar, welches selbe passiert, wenn $m = 5$ oder 7 etc. ist. Es sei $m = 4$; es wird

$$f = 9 \cdot 2^{n+1} - 1, \quad x = 9 \cdot 2^{n-3} \quad \text{und} \quad y = 9 \cdot 2^{n-3}(9 \cdot 2^{n+1} - 1) \quad \text{und} \quad a = 2^n \cdot f$$

sein, woraus man diese Beispiele bildet:

$n =$	1	4	5	6
$f =$	35*	287*	575*	1151
$x =$	...	...	...	72
$y =$	...	...	...	82872
$p =$	...	...	...	71
$q =$	...	...	...	82871*
$r =$	...	...	...	...

Und daraus lassen sich also aus den größeren m zuzuteilenden Werten keine befreundeten Zahlen finden.

REGEL 4

§51 Es können auch anderen Ausdrücke für den gemeinsamen Faktor a gefunden werden, aus welchen der Nenner c des Bruchs $\frac{b}{c}$ entweder der Einheit oder einer Potenz von zwei gleich wird. Denn wir wollen $a = 2n(g-1)(h-1)$ ansetzen, dass $g-1$ und $h-1$ Primzahlen sind; es wird

$$\int a = (2^{n+1}-1)gh = 2^{n+1}gh - gh$$

sein; aber es ist $2a = 2^{n+1}gh - 2^{n+1}g - 2^{n+1}h + 2^{n+1}$, woher

$$2a - \int a = gh - 2^{n+1}g - 2^{n+1}h + 2^{n+1}$$

wird. Man setze $2a - \int a = d$; es wird $gh - 2^{n+1}(g+h) + 2^{n+1} = d$ und

$$(g - 2^{n+1})(h - 2^{n+1}) = d - 2^{n+1} + 2^{2n+2}$$

sein, woher nach der Auflösung in Faktoren Werte von solcher Art für g und h gefunden werden müssen, dass $g-1$ und $h-1$ Primzahlen werden; und dann wird

$$a = 2^n(g-1)(h-1) \quad \text{und} \quad \frac{b}{c} = \frac{a}{d}$$

sein.

I. Wir wollen $n = 1$ setzen; es wird

$$(g-4)(h-4) = d + 12$$

sein; damit hier $d + 12$ zwei gerade Faktoren erhält, werden die folgenden Werte hervorgehen:
Es sei $d = 4$; es wird

$$(g-4)(h-4) = 16 = 2 \cdot 8 \quad \text{sein, daher} \quad g = 6, \quad h = 12,$$

$$a = 2 \cdot 5 \cdot 11 \quad \text{sowie} \quad \frac{b}{c} = \frac{2 \cdot 5 \cdot 11}{4}, \quad \text{also} \quad b = 5 \cdot 11 \quad \text{und} \quad c = 2.$$

Es sei $d = 8$; es wird

$$(g-4)(h-4) = 20 = 2 \cdot 10 \quad \text{sein, daher} \quad g = 6, \quad h = 14,$$

$$a = 2 \cdot 5 \cdot 13 \quad \text{sowie} \quad \frac{b}{c} = \frac{2 \cdot 5 \cdot 13}{8}, \quad \text{also} \quad b = 5 \cdot 13 \quad \text{und} \quad c = 4.$$

Es sei $d = 16$; es wird

$$(g-4)(h-4) = 28 = 2 \cdot 14 \quad \text{sein, daher} \quad g = 6, \quad h = 18,$$

$$a = 2 \cdot 5 \cdot 17 \quad \text{sowie} \quad \frac{b}{c} = \frac{2 \cdot 5 \cdot 17}{16}, \quad \text{also} \quad b = 5 \cdot 17 \quad \text{und} \quad c = 8.$$

II. Wir wollen $n = 2$ setzen; es wird

$$(g-8)(h-8) = d + 56$$

sowie $a = 4(g-1)(h-1)$ sein, woraus die folgenden Fälle resultieren:

Es sei $d = 4$; es wird

$$(g-8)(h-8) = 60 = 6 \cdot 10 \quad \text{sein, daher} \quad g = 14, \quad h = 18,$$

$$a = 4 \cdot 13 \cdot 17 \quad \text{sowie} \quad \frac{b}{c} = \frac{4 \cdot 13 \cdot 17}{4}, \quad \text{also} \quad b = 13 \cdot 17 \quad \text{und} \quad c = 1.$$

Es sei $d = 8$; es wird

$$(g-8)(h-8) = 64 = 4 \cdot 16 \quad \text{sein, daher} \quad g = 12, \quad h = 24,$$

$$a = 4 \cdot 11 \cdot 23 \quad \text{sowie} \quad \frac{b}{c} = \frac{4 \cdot 11 \cdot 23}{8}, \quad \text{also} \quad b = 11 \cdot 23 \quad \text{und} \quad c = 2.$$

Es sei $d = 16$; es wird

$$(g-8)(h-8) = 72 = 6 \cdot 12 \quad \text{sein, daher} \quad g = 14, \quad h = 20,$$

$$a = 4 \cdot 13 \cdot 19 \quad \text{sowie} \quad \frac{b}{c} = \frac{4 \cdot 13 \cdot 19}{16}, \quad \text{also} \quad b = 13 \cdot 19 \quad \text{und} \quad c = 4.$$

III. Wir wollen $n = 3$ setzen, dass $a = 8(g-1)(h-1)$ ist, und es wird

$$(g-16)(h-16) = d + 240$$

sein müssen.

Es sei $d = 4$; es wird

$$(g-16)(h-16) = 244 = 2 \cdot 122 \quad \text{sein, daher} \quad g = 18, \quad h = 138,$$

$$a = 8 \cdot 17 \cdot 137 \quad \text{sowie} \quad \frac{b}{c} = \frac{8 \cdot 17 \cdot 137}{4}, \quad \text{also} \quad b = 2 \cdot 17 \cdot 137 \quad \text{und} \quad c = 1.$$

Es sei $d = 8$; es wird

$$(g-16)(h-16) = 248 = 2 \cdot 124 \quad \text{sein, daher} \quad g = 18, \quad h = 140,$$

$$a = 8 \cdot 17 \cdot 139 \quad \text{sowie} \quad \frac{b}{c} = \frac{8 \cdot 17 \cdot 139}{8}, \quad \text{also} \quad b = 17 \cdot 139 \quad \text{und} \quad c = 1.$$

Es sei $d = 8$; es wird

$$(g-16)(h-16) = 256 = 4 \cdot 16 \quad \text{sein, daher} \quad g = 20, \quad h = 80,$$

$$a = 8 \cdot 19 \cdot 79 \quad \text{sowie} \quad \frac{b}{c} = \frac{8 \cdot 19 \cdot 79}{16}, \quad \text{also} \quad b = 19 \cdot 79 \quad \text{und} \quad c = 2.$$

Es sei wiederum $d = 16$ und

$$(g-16)(h-16) = 8 \cdot 32; \quad \text{daher} \quad g = 24, \quad h = 48,$$

$$a = 8 \cdot 23 \cdot 47 \quad \text{sowie} \quad \frac{b}{c} = \frac{8 \cdot 23 \cdot 47}{16}, \quad \text{also} \quad b = 23 \cdot 47 \quad \text{und} \quad c = 2.$$

Wenn, nachdem daraus die Werte für a gefunden worden sind, die Zahlen $a(x-1)(y-1)$ und $a(xy-1)$ als befreundet festgelegt werden, dass $x-1$, $y-1$ und $xy-1$ Primzahlen sind, ist zu bewirken, dass $(cx-b)(cy-b) = bb$ ist.

BEISPIEL 1

§52 Es sei $a = 2 \cdot 5 \cdot 11$; es wird $b = 5 \cdot 11 = 55$ und $c = 2$ sein, woher

$$(2x - 55)(2y - 55) = 5^2 \cdot 11^2$$

werden wird.

$2x - 35 =$	1	5	25
$2y - 35 =$	3025	605	121
$x =$	28	30	40
$y =$	1540	330	88
$x - 1 =$	27*	29	39*
$y - 1 =$	...	329*	...
$xy - 1 =$	...	...	...

Daher werden also keine befreundeten Zahlen erhalten.

BEISPIEL 2

§53 Es sei $a = 2 \cdot 5 \cdot 13$; es wird $b = 5 \cdot 13 = 65$ und $c = 4$ sein, woher

$$(4x - 65)(4y - 65) = 5^2 \cdot 13^2$$

wird. Aber diese Zahl $5^2 \cdot 13^2$ kann nicht in zwei Faktoren aufgelöst werden, welche um 65 vermehrt durch 4 teilbar werden; dasselbe passiert beim Wert $a = 2 \cdot 5 \cdot 17$.

BEISPIEL 3

§54 Es sei $a = 4 \cdot 13 \cdot 17$; es wird $b = 13 \cdot 17 = 221$ und $c = 1$ sein und es muss $(x - 221)(y - 221) = 13^2 \cdot 17^2$ sein; daraus ergibt sich

$x - 221 =$	13	17	169
$y - 221 =$	3757	$\cdots$	289
$x - 1 =$	233	237*	389
$y - 1 =$	3977*	$\cdots$	509
$xy - 1 =$	$\cdots$	$\cdots$	198899

In der letzten Auflösung werden $x - 1$ und $y - 1$ Primzahlen, also geht die Frage darauf zurück, ob $xy - 1 = 198899$ eine Primzahl ist oder nicht. Obgleich aber diese Zahl die Grenze 100000 überschreitet, kann ich dennoch aufzeigen, dass sie prim ist, woher die Zahlen

$$\begin{cases} 4 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 389 \cdot 509 \\ 4 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 198899 \end{cases}$$

befreundet sein werden.

SCHOLION

§55 Ich erschließe aber, dass diese Zahl 198899 eine Primzahl ist, daraus, weil ich beobachtet habe, dass $198899 = 2 \cdot 47^2 + 441^2$ ist, sodass 198899 eine in dieser Form $2aa + bb$ enthaltene Zahl ist. Es ist aber gesichert, wenn eine Zahl auf eine einzige Weise in der Form $2aa + bb$ enthalten ist, dass sie dann prim ist, wenn sie aber auf zwei oder mehrere Weisen in die Form $2aa + bb$ gebracht werden kann, dass sie dann zusammengesetzt ist. Ich habe also untersucht, ob von dieser Zahl ein anderes doppeltes Quadrat als 47^2 abgezogen werden kann, dass der Rest ein Quadrat wird, und ich habe nach der Rechnung keines gefunden; daraus schließe ich mit Sicherheit, dass diese Zahl prim ist und daher die gefundenen Zahlen befreundet sind. Aber aus den übrigen Werten von a, welche ich dargeboten habe, werden keine befreundeten Zahlen gefunden.

REGEL 5

§56 Es können auch anderen geeignete Zahlen für a angenommen werden, aus denen sich befreundete Zahlen finden lassen. Weil aber für diese keine allgemeine Regel angegeben werden kann, möchte ich hier nur ein paar entwickeln, zu deren Nachahmung es nicht schwierig sein wird andere zu erdenken.

I. Es sei also $a = 3^2 \cdot 5 \cdot 13$; es wird $\int a = 13 \cdot 6 \cdot 14$ sein und wegen $2a = 90 \cdot 13$ und wegen $\int a = 84 \cdot 13$ wird $2a - \int a = 6 \cdot 13$ sowie $\frac{b}{c} = \frac{a}{2a - \int a} = \frac{3^2 \cdot 5 \cdot 13}{6 \cdot 13} = \frac{15}{2}$ und daher $b = 15$ und $c = 2$ sein.

II. Es sei $a = 3^2 \cdot 7 \cdot 13$; es wird $\int a = 13 \cdot 8 \cdot 14 = 16 \cdot 7 \cdot 13$ sein, woher wegen $2a = 18 \cdot 7 \cdot 13$ wird $2a - \int a = 2 \cdot 7 \cdot 13$ und daher $\frac{b}{c} = \frac{3^2 \cdot 7 \cdot 13}{2 \cdot 7 \cdot 13} = \frac{9}{2}$ sein wird, woher $b = 9$ und $c = 2$ ist.

III. Es sei $a = 3^2 \cdot 7^2 \cdot 13$; es wird $\int a = 13 \cdot 3 \cdot 19 \cdot 14 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 19$ und $2a = 42 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13$ sein, woher $2a - \int a = 4 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13$ und daher $\frac{b}{c} = \frac{3^2 \cdot 7^2 \cdot 13}{4 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13} = \frac{21}{4}$ ist, also $b = 21$ und $c = 4$.

IV. Es sei $a = 3^3 \cdot 5$; es wird $\int a = 5 \cdot 8 \cdot 6 = 16 \cdot 3 \cdot 5$ sein. Also wird wegen $2a = 18 \cdot 3 \cdot 5$ wird $2a - \int a = 2 \cdot 3 \cdot 5$ und daher $\frac{b}{c} = \frac{3^3 \cdot 5}{2 \cdot 3 \cdot 5} = \frac{9}{2}$ und $b = 9$ und $c = 2$ sein.

V. Es sei $a = 3^2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 19$; es wird $\int a = 13 \cdot 6 \cdot 14 \cdot 20 = 16 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$ sein und wegen $2a = 114 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 13$ und $\int a = 112 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 13$ wird $\frac{b}{c} = \frac{3^2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 19}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 13} = \frac{3 \cdot 19}{2}$ und $b = 3 \cdot 19 = 57$ und $c = 2$ sein.

VI. Es sei $a = 3^2 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19$; es wird $\int a = 13 \cdot 3 \cdot 19 \cdot 14 \cdot 20 = 8 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 19$ sein und wegen $2a = 42 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 19$ wird $\frac{b}{c} = \frac{3^2 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19}{2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 19} = \frac{21}{2}$ sein, woher $b = 21$ und $c = 2$ wird.

Nachdem diese Zahlen $a(x-1)(y-1)$ und $a(xy-1)$ aber als befreundet festgelegt worden sind, muss $(cx - b)(cy - b) = bb$ werden.

Beispiel 1

§57 Es sei $b = 15$, $c = 2$; es wird $a = 3^2 \cdot 5 \cdot 13$ sein und es muss dieser Gleichung $(2x - 15)(2y - 15) = 225$ Genüge leistet werden.

$2x-15$	1	5	9
$2y-15$	225	45	25
x	8	10	12
y	120	30	20
$x-1$	7	9*	11
$y-1$	119*	$\cdots$	19
$xy-1$	$\cdots$	$\cdots$	239

Also werden die befreundeten Zahlen sein:

$$\begin{cases} 3^2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 11 \cdot 19 \\ 3^2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 239 \end{cases}$$

Beispiel 2

§58 Es sei $b = 9$, $c = 2$; es wird entweder $a = 3^2 \cdot 7 \cdot 13$ oder $a = 3^3 \cdot 5$ sein und die Gleichung $(2x-9)(2y-9) = 81$ aufzulösen sein.

$2x-9$	3
$2y-9$	27
x	6
y	18
$x-1$	5
$y-1$	17
$xy-1$	107

Daher, weil $x-1=5$ ist, kann dieser Wert nicht mit $a = 3^3 \cdot 5$ kombiniert werden. Also werden die befreundeten Zahlen sein: $\begin{cases} 3^2 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 5 \cdot 17 \\ 3^2 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 107. \end{cases}$

Beispiel 3

§59 Es sei $b = 21$ und $c = 4$; es wird $a = 3^2 \cdot 7^2 \cdot 13$ und die Gleichung $(3x-21)(3y-21) = 441$ aufzulösen sein.

$4x-21$	3
$4y-21$	147
x	6
y	42
$x-1$	5
$y-1$	41
$xy-1$	251

Weil x und y gerade Zahlen sein müssen, findet eine andere Auflösung keinen Platz.

Aus dieser gehen also diese befreundeten Zahlen hervor:

$$\begin{cases} 3^2 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 5 \cdot 41 \\ 3^2 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 251. \end{cases}$$

BEISPIEL 4

§60 Es sei $b = 21$ und $c = 2$; es wird $a = 3^2 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19$ und die Gleichung $(2x-21)(2y-21) = 441$ sein.

$2x-21$	3	7
$2y-21$	147	63
x	12	14
y	84	42
$x-1$	11	13
$y-1$	83	41
$xy-1$	1007*	587

Weil aber der Wert $x-1 = 13$ schon im Wert a enthalten ist, werden daraus keine befreundeten Zahlen erhalten.

BEISPIEL 5

§61 Es sei $b = 57$ und $c = 2$; es wird $a = 3^2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 19$ und die Gleichung $(2x-57)(2y-57) = 3249$ aufzulösen sein.

$2x-57$	3	19
$2y-57$	1083	171
x	30	38
y	570	114
$x-1$	29	37
$y-1$	569	113
$xy-1$	17099	4331*

Daraus entspringen also diese befreundeten Zahlen:

$$\begin{cases} 3^2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 29 \cdot 569 \\ 3^2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 17099. \end{cases}$$

BEISPIEL 6

§61 Es sei $b = 45$ und $c = 2$; es wird $a = 3^4 \cdot 5 \cdot 11$ und die Gleichung $(2x-45)(2y-45) = 2025$ aufzulösen sein.

$2x-45$	3	15
$2y-45$	675	135
x	24	30
y	360	90
$x-1$	23	29
$y-1$	359	89
$xy-1$	8639*	2699

Daraus entspringen also diese befreundeten Zahlen:

$$\begin{cases} 3^4 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 89 \\ 3^4 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 2699. \end{cases}$$

BEISPIEL 7

§61 Es sei $b = 77$ und $c = 2$; es wird $a = 3^2 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13$ und die Gleichung $(2x-77)(2y-77) = 49 \cdot 121$ aufzulösen sein.

$2x-77$	7	11
$2y-77$	847	539
x	42	44
y	462	308
$x-1$	41	43
$y-1$	461	307
$xy-1$	19403	13551*

Daraus entspringen also diese

befreundeten Zahlen:

$$\begin{cases} 3^2 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 41 \cdot 461 \\ 3^2 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 19403. \end{cases}$$

BEISPIEL 5

§61 Es sei $b = 105$ und $c = 2$; es wird $a = 3^2 \cdot 5 \cdot 7$ und die Gleichung $(2x-105)(2y-105) = 105^2$ aufzulösen sein.

$2x-105$	3	7	15	35
$2y-105$	3675	$\cdots$	735	$\cdots$
x	54	56	60	70
y	1890	$\cdots$	420	$\cdots$
$x-1$	53	55*	59	69*
$y-1$	1889	$\cdots$	419	$\cdots$
$xy-1$	102059	$\cdots$	25199*	$\cdots$

Weil 102059 eine Primzahl ist, da sie in der Form $8a+3$ enthalten ist und auf eine einzige Weise auf die Form $2aa+bb$ gebracht wird, werden die daraus entspringenden befreundeten Zahlen sein: $\begin{cases} 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 53 \cdot 1889 \\ 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 102059. \end{cases}$

SCHOLION

§65 Also sind die befreundeten Zahlen, welche wir bisher aus der Form apq, ar gefunden haben, diese

$$\text{I.} \begin{cases} 2^2 \cdot 5 \cdot 11 \\ 2^2 \cdot 71 \end{cases} \qquad \text{II.} \begin{cases} 2^4 \cdot 23 \cdot 47 \\ 2^4 \cdot 1151 \end{cases} \qquad \text{III.} \begin{cases} 2^7 \cdot 191 \cdot 383 \\ 2^7 \cdot 73727 \end{cases}$$

IV. $\begin{cases} 4 \cdot 23 \cdot 5 \cdot 137 \\ 4 \cdot 23 \cdot 827 \end{cases}$ V. $\begin{cases} 4 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 389 \cdot 509 \\ 4 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 198899 \end{cases}$ VI. $\begin{cases} 3^2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 11 \cdot 19 \\ 3^2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 239 \end{cases}$

VII. $\begin{cases} 3^2 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 5 \cdot 17 \\ 3^2 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 107 \end{cases}$ VIII. $\begin{cases} 3^2 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 5 \cdot 41 \\ 3^2 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 251 \end{cases}$ IX. $\begin{cases} 3^2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 29 \cdot 569 \\ 3^2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 17099 \end{cases}$

X. $\begin{cases} 3^4 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 89 \\ 3^4 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 2699 \end{cases}$ XI. $\begin{cases} 3^2 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 41 \cdot 461 \\ 3^2 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 19403 \end{cases}$ XII. $\begin{cases} 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 53 \cdot 1889 \\ 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 102059 \end{cases}$

PROBLEM 2

§66 *Befreundete Zahlen der zweiten Form apq, ars zu finden, nachdem p, q, r, s als Primzahlen festgelegt worden sind und der gemeinsame Faktor a gegeben ist.*

LÖSUNG

Weil der gemeinsame Faktor a gegeben ist, suche man aus ihm den Wert des Bruchs $\frac{b}{c} = \frac{a}{2a - \int a}$ in kleinsten Termen und daher wird $a : \int a = b : 2b - c$ sein. Weil dann $\int p \cdot \int q = \int r \cdot \int s$ oder $(p+1)(q+1) = (r+1)(s+1)$ sein muss, setze man jeden der beiden Werte $= \alpha\beta xy$ und man nehme

$$p = \alpha x - 1, \quad q = \beta y - 1, \quad r = \beta x - 1, \quad s = \alpha y - 1.$$

Hier ist es offensichtlich, dass diese Zahlen α, β, x, y Zahlen von solcher Art sein müssen, dass p, q, r, s Primzahlen werden, und die befreundeten Zahlen werden dann entsprechend

$$a(\alpha x - 1)(\beta y - 1) \quad \text{und} \quad a(\beta x - 1)(\alpha y - 1).$$

Außerdem muss aber aus der Natur der befreundeten Zahlen

$$\alpha\beta xy \int a = a(\alpha x - 1)(\beta y - 1) + a(\beta x - 1)(\alpha y - 1)$$

sein oder wegen $\int a : a = 2b - c : b$ wird

$$\left.\begin{array}{r} 2b\alpha\beta xy \\ -c\alpha\beta xy \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} 2b\alpha\beta xy - b\alpha x - b\beta y + 2b \\ \qquad\qquad - b\beta x - b\alpha y \end{array}\right.$$

oder

$$c\alpha\beta xy = b(\alpha+\beta)(x+y) - 2b$$

sein. Daher wird

$$\begin{aligned} cc\alpha^2\beta^2xy &- bc\alpha\beta(\alpha+\beta)x + bb(\alpha+\beta)^2 = -2bc\alpha\beta + bb(\alpha+\beta)^2. \\ &- bc\alpha\beta(\alpha+\beta)y \end{aligned}$$

Daher muss dieser Gleichung Genüge geleistet werden

$$(c\alpha\beta x - b(\alpha+\beta))(c\alpha\beta y - b(\alpha+\beta)) = bb(\alpha+\beta)^2 - 2bc\alpha\beta.$$

Also muss die Zahl $bb(\alpha+\beta)^2 - 2bc\alpha\beta$ in jedem Fall in zwei Faktoren,die P und Q seien, solcher Art, aufgelöst werden, dass nach Setzen von

$$x = \frac{P + b(\alpha+\beta)}{c\alpha\beta} \quad \text{und} \quad y = \frac{Q + b(\alpha+\beta)}{c\alpha\beta}$$

diese Zahlen x und y nicht nur ganzzahlig sind, sondern auch $\alpha x - 1$, $\beta y - 1$, $\beta x - 1$ und $\alpha y - 1$ Primzahlen sind. Es wird also

$$p = \frac{P + b\alpha + (b-c)\beta}{c\beta}, \quad q = \frac{Q + b\beta + (b-c)\alpha}{c\alpha},$$
$$r = \frac{P + b\beta + (b-c)\alpha}{c\alpha}, \quad s = \frac{Q + b\alpha + (b-c)\alpha}{c\beta}.$$

Also ist nach Vorlage eines gewissen Wertes a, woraus man $\frac{b}{c} = \frac{a}{2a - \int a}$ findet, zu untersuchen, ob sowohl diese Zahlen α und β so angenommen werden also auch diese Auflösung

$$bb(\alpha+\beta)^2 - 2bc\alpha\beta = PQ$$

so durchgeführt werden kann, dass die gerade angegebenen Werte für p, q, r und s Primzahlen werden und zwar solche, dass der gemeinsame Faktor a keine von ihnen involviert. Sooft aber diesen Bedingungen Genüge geleistet wird, werden die Zahlen apq und ars befreundet sein.

KOROLLAR

§67 Weil ja nicht $\alpha = \beta$ sein kann, lege man für diese Zahlen α und β einfachere Zahlen fest und daher werden die folgenden Fälle entspringen:

I. Es sei $\alpha = 1$, $\beta = 2$; es wird $PQ = 9bb - 4bc$ sein sowie

$$p = \frac{P + 2b - 2c}{2c}, \quad q = \frac{Q + 3b - c}{c},$$
$$r = \frac{P + 3b - c}{c}, \quad s = \frac{Q + 3b - 2c}{2c}.$$

II. Es sei $\alpha = 1$, $\beta = 3$; es wird $PQ = 16bb - 6bc$ sein sowie

$$p = \frac{P + 4b - 3c}{3c}, \quad q = \frac{Q + 4b - c}{c},$$
$$r = \frac{P + 4b - c}{c}, \quad s = \frac{Q + 4b - 3c}{3c}.$$

III. Es sei $\alpha = 2$, $\beta = 3$; es wird $PQ = 25bb - 12bc$ sein sowie

$$p = \frac{P + 5b}{3c} - 1, \quad q = \frac{Q + 5b}{2c} - 1,$$
$$r = \frac{P + 5b}{2c} - 1, \quad s = \frac{Q + 5b}{3c} - 1.$$

IV. Es sei $\alpha = 1$, $\beta = 4$; es wird $PQ = 25bb - 8bc$ sein sowie

$$p = \frac{P + 5b}{4c} - 1, \quad q = \frac{Q + 5b}{c} - 1,$$
$$r = \frac{P + 5b}{c} - 1, \quad s = \frac{Q + 5b}{4c} - 1.$$

V. Es sei $\alpha = 3$, $\beta = 4$; es wird $PQ = 49bb - 24bc$ sein sowie

$$p = \frac{P + 7b}{4c} - 1, \quad q = \frac{Q + 7b}{3c} - 1,$$
$$r = \frac{P + 7b}{3c} - 1, \quad s = \frac{Q + 7b}{4c} - 1.$$

VI. Es sei $\alpha = 1$, $\beta = 5$; es wird $PQ = 36bb - 10bc$ sein sowie

$$p = \frac{P+6b}{5c} - 1, \quad q = \frac{Q+6b}{c} - 1,$$

$$r = \frac{P+6b}{c} - 1, \quad s = \frac{Q+6b}{5c} - 1.$$

VII. Es sei $\alpha = 2$, $\beta = 5$; es wird $PQ = 49bb - 20bc$ sein sowie

$$p = \frac{P+7b}{3c} - 1, \quad q = \frac{Q+7b}{2c} - 1,$$

$$r = \frac{P+7b}{2c} - 1, \quad s = \frac{Q+7b}{5c} - 1.$$

VIII. Es sei $\alpha = 3$, $\beta = 5$; es wird $PQ = 64bb - 30bc$ sein sowie

$$p = \frac{P+8b}{5c} - 1, \quad q = \frac{Q+8b}{3c} - 1,$$

$$r = \frac{P+8b}{3c} - 1, \quad s = \frac{Q+8b}{5c} - 1.$$

IX. Es sei $\alpha = 4$, $\beta = 5$; es wird $PQ = 81bb - 40bc$ sein sowie

$$p = \frac{P+9b}{5c} - 1, \quad q = \frac{Q+9b}{4c} - 1,$$

$$r = \frac{P+9b}{4c} - 1, \quad s = \frac{Q+9b}{5c} - 1.$$

X. Es sei $\alpha = 1$, $\beta = 6$; es wird $PQ = 49bb - 12bc$ sein sowie

$$p = \frac{P+7b}{6c} - 1, \quad q = \frac{Q+7b}{c} - 1,$$

$$r = \frac{P+7b}{c} - 1, \quad s = \frac{Q+7b}{6c} - 1.$$

XI. Es sei $\alpha = 5$, $\beta = 6$; es wird $PQ = 121bb - 60bc$ sein sowie

$$p = \frac{P + 11b}{6c} - 1, \quad q = \frac{Q + 11b}{5c} - 1,$$

$$r = \frac{P + 11b}{5c} - 1, \quad s = \frac{Q + 11b}{6c} - 1.$$

Gemäß dieser Fälle möchte ich also die schon zuvor verwendeten Werte von a, weil sie in Bezug auf die übrigen besser geeignet scheinen, um befreundete Zahlen zu finden, entwickeln; aus diesen möchte ich aber hauptsächlich diese herausnehmen, sie tatsächlich zu befreundeten Zahlen führen.

Beispiel 1

§68 Es sei $a = 2^2$; es wird $b = 4$ und $c = 1$ sein. Man nehme den zweiten Fall, in welchem $\alpha = 1$, $\beta = 3$ ist, dass die befreundeten Zahlen 2^2pq und 2^2rs sind, und es muss

$$PQ = 16 \cdot 16 - 6 \cdot 4 = 232$$

sowie

$$p = \frac{P + 16}{3} - 1, \quad q = Q + 16 - 1, \quad r = P + 16 - 1 \quad \text{und} \quad s = \frac{Q + 16}{3} - 1$$

sein. Also müssen die Faktoren der Zahl 232 so beschaffen sein, dass sie um 16 vermehrt durch 3 teilbar werden.

$P = 2$	
$Q = 116$	Eine andere Auflösung gelingt nicht; wenn nämlich
$P + 16 = 18$	$p = 8$ gesetzt werden würde, wäre die Zahl Q ungerade
$Q + 16 = 132$	und daher könnten also q und
$p = 5$	s keine Primzahlen sein. Daher werden diese
$q = 131$	Zahlen befreundet sein:
$r = 17$	$\begin{cases} 2^2 \cdot 5 \cdot 131 \\ 2^2 \cdot 17 \cdot 43. \end{cases}$
$s = 43$	

Beispiel 2

§69 Wenn $\alpha = 1$ und $\beta = 3$ und a eine Potenz größer als zwei ist, gelingt der Fund von befreundeten Zahlen nicht, bis man zu 2^8 gelangt. Aber dann wird $b = 2^8$ und $c = 1$ sein sowie

$$PQ = 16 \cdot 2^{16} - 6 \cdot 2^8 = 2^9(2^{11} - 3) = 512 \cdot 2045 = 512 \cdot 5 \cdot 409,$$

$$p = \frac{P + 1024}{3} - 1, \quad q = Q + 1024 - 1, \quad r = P + 1024 - 1, \quad s = \frac{Q + 1024}{3} - 1,$$

woher die Faktoren P und Q so beschaffen sein müssen, dass sie um vier vermehrt durch 3 oder, damit die Quotienten gerade werden, durch 6 teilbar sind.

$P =$	2	8	20	32	80	128	320	1280
$Q =$	…	…	…	…	13088	8180	…	…
$P + 1024 =$	1026	1032	1044	1056	1104	1152	1344	2304
$Q + 1024 =$	…	…	…	…	14112	9204	…	…
$p =$	341*	343*	347	…	367	383	447*	767*
$q =$	…	…	…	…	14111*	9203	…	…
$r =$	1025*	…	1043*	1055*	1103	1151	1343*	2303*
$s =$	…	…	…	…	4703	3067	…	…

Also werden die befreundeten Zahlen sein: $\begin{cases} 2^8 \cdot 383 \cdot 9203 \\ 2^8 \cdot 1151 \cdot 3067. \end{cases}$

Beispiel 3

§70 Es sei $\alpha = 2$ und $\beta = 3$ und man nehme $a = 3^2 \cdot 5 \cdot 13$, dass $b = 15$ und $c = 2$ ist; es wird

$$PQ = 25 \cdot 225 - 12 \cdot 30 = 3^4 \cdot 5 \cdot 13,$$

$$p = \frac{P + 75}{6} - 1, \quad q = \frac{Q + 75}{4} - 1, \quad r = \frac{P + 75}{4} - 1, \quad s = \frac{Q + 75}{6} - 1,$$

sein, woher die Faktoren P und Q von solcher Art sein müssen, dass sie um drei vermehrt durch 24 teilbar werden.

$P = 45$	
$Q = 117$	
$P + 75 = 120$	Andere Auflösung finden keinen
$Q + 75 = 192$	keinen Platz; daher gehen diese befreundeten Zahlen
$p = 19$	hervor:
$q = 47$	$\begin{cases} 3^2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 47 \\ 3^2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 29 \cdot 31. \end{cases}$
$r = 29$	
$s = 31$	

BEISPIEL 4

§71 Es sei $\alpha = 1$ und $\beta = 4$ und man nehme $a = 3^3 \cdot 5$, dass $b = 9$ und $c = 2$ ist; es wird

$$PQ = 25 \cdot 81 - 8 \cdot 18 = 9 \cdot 11 \cdot 19$$

und

$$p = \frac{P + 45}{8} - 1, \quad q = \frac{Q + 45}{2} - 1, \quad r = \frac{P + 45}{2} - 1, \quad s = \frac{Q + 45}{8} - 1$$

sein, woher P und Q Zahlen von solcher Art sein müssen, dass sie um fünf durch 8 teilbar werden.

$P =$	19
$Q =$	99
$P + 45 =$	64
$Q + 45 =$	144
$p =$	7
$q =$	71
$r =$	31
$s =$	17

Daher entspringen also die befreundeten Zahlen:

$$\begin{cases} 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 71 \\ 3^3 \cdot 5 \cdot 31 \cdot 17. \end{cases}$$

SCHOLION

§72 Aber diese Operationen sind zu ungewiss und viele werden vergebens unternommen, bevor sich die befreundeten Zahlen zeigen. Zudem wäre der Aufwand immens, wenn wir für einzelnen Werte von a, welche ich freilich oben dargeboten habe, die einzelnen Fälle der Buchstaben α und β durchgehen wollen; und es passiert allzu selten, dass die vier für p, q, r und s resultierenden Zahlen zugleich prim werden. Aber dann wird auch das Finden der befreundeten Zahlen durch die Bestimmung des Verhältnisses von α und β allzu sehr eingeschränkt und es sind Fälle von Zahlen solcher Art gegeben, in denen das Verhältnis $\alpha : \beta$ so kompliziert ist, dass keines auf wahrscheinliche Weise hätte ausgewählt werden können; von solcher Art sind die befreundeten Zahlen $2^4 \cdot 19 \cdot 8563$ und $2^4 \cdot 83 \cdot 2089$, um welche auf diesem Weg zu finden, das Verhältnis $\alpha : \beta$ als $5 : 21$ oder $1 : 102$ hätte angenommen werden müssen. Deswegen halte ich mich mit dieser allzu fruchtlosen und aufwendigen Methode nicht länger auf, sondern möchte einen anderen Weg eröffnen, auf welchem sich leichter und schneller befreundete Zahlen so von dieser zweiten Form wie von anderen höher zusammengesetzten ausfindig machen lassen und welcher dem vorhergehenden ähnlich ist, welcher über das Finden von nur drei Primzahlen beschritten wird.

PROBLEM 3

§73 *Befreundete Zahlen von dieser Form apq und afr zu finden, wo p, q und r Primzahlen sind, f aber prim oder zusammengesetzt, welche genauso wie der gemeinsame Faktor a gegeben sei.*

LÖSUNG

Man suche wiederum aus dem bekannten Faktor a die Werte b und c, dass $\frac{b}{c} = \frac{a}{2a - \int a}$ ist, und die Summe der Teiler der Zahl f sei $\int f = gh$. Weil also zuerst verlangt wird, dass $\int p \cdot \int q = \int f \cdot \int r$ ist, wird $(p+1)(q+1) = gh(r+1)$ sein. Man setze $r + 1 = xy$, $p + 1 = hx$ und $q + 1 = gy$ und es wird notwendig sein, dass diese drei Zahlen prim sind, natürlich $p = hx - 1$, $q = gy - 1$ und $r = xy - 1$. Darauf ist es nötig, dass gilt

$$\begin{aligned} \int apq = ghxy \int a &= a(hx-1)(gy-1) + af(xy-1) \\ &= a((gh+f)xy - hx - gy + 1 - f) \end{aligned}$$

oder

$$2bghxy - cghxy = b(gh+f)xy - bhx - bgy + b(1-f)$$

oder

$$(bf - bgh + cgh)xy - bhx - bgy = b(f-1).$$

Wir wollen der Kürze wegen

$$bf - bgh + cgh = e$$

setzen; es wird $eexy - ebhx - ebgy = eb(f-1)$ oder

$$(ex - bg)(ey - bh) = bbgh + be(f-1)$$

sein. Also muss die Zahl $bbgh + be(f-1)$ in zwei Faktoren, welche P und Q seien, von solcher Art aufgelöst werden, dass

$$x = \frac{P + bg}{e} \quad \text{und} \quad y = \frac{Q + bh}{e}$$

ganze Zahlen werden, dann aber $hx - 1$, $gy - 1$ und $xy - 1$ Primzahlen werden. Sooft diese Bedingungen erfüllt werden können, werden die Zahlen $a(hx -$

$1)(gy-1)$ und $af(xy-1)$ befreundet sein. Es ist aber zu bemerken, dass weder eine dieser Primzahlen $hx-1$, $gy-1$, $xy-1$ noch ein Faktor von f ein Teiler von a sein darf und auch f und $xy-1$ zueinander teilerfremd sein müssen.

Korollar 1

§74 Wenn f eine Primzahl ist, wie die zweite Form von befreundeten Zahlen erfordert, wird $f+1=gh$ und deshalb wird $f=gh-1$ sein. In diesem Fall wird $e=cgh-b$ und $PQ=bbgh+be(gh-2)$ oder

$$PQ = bcgghh - 2bcgh + 2bb$$

sein. Daher müssen die mit den oben versehenen Eigenschaften Zahlen x und y gesucht werden, dass

$$x = \frac{P+bg}{e} \quad \text{und} \quad y = \frac{Q+bh}{e}$$

ist.

§75 Es wird also gefällig sein, diese Formeln so zu gebrauchen, dass für a nacheinander die einen oder anderen Werte aus denen, welche ich oben dargestellt habe, eingesetzt werden und für die einzelnen Werte des Buchstabens f verschiedene Zahlen, so prime wie zusammengesetzte, eingesetzt werden, welche freilich geeignet erscheinen, um befreundete Zahlen zu finden.

Fall 1

§76 Es sei $a=4$ (denn ich habe beobachtet, dass aus dem Wert $a=2$ keine befreundeten Zahlen erhalten werden) und es wird $b=4$ und $c=1$ sein. Dann, nachdem die Zahlen $4pq$ und $4fr$ als befreundet festgelegt worden sind, sei $\int f = gh$ und $e=4f-3gh$. Darauf suche man über die Auflösung die Faktoren P und Q, dass

$$PQ = 16gh + 4e(f-1)$$

ist. Und daher finde man ganze Zahlen x und y, dass

$$x = \frac{P+4g}{e} \quad \text{und} \quad y = \frac{Q+4h}{e}$$

ist, und aus diesen leite man die Werte der Buchstaben $p = hx - 1$, $q = gy - 1$ und $r = xy - 1$ ab; wenn diese Primzahlen waren, werden $4pq$ und $4fr$ befreundete Zahlen sein.

BEISPIEL 1

§77 Es sei $f = 3$; es wird $\int f = gh = 4$ und daher $e = 12 - 12 = 0$ sein, woher klar ist, dass aus dieser Annahme nichts erhalten wird.

BEISPIEL 2

§78 Es sei $f = 5$; es wird $\int f = gh = 6$, $e = 20 - 18 = 2$ sowie

$$PQ = 16 \cdot 6 + 8 \cdot 4 = 128$$

sein. Nun setze man aus $gh = 6$ zuerst $g = 2$ und $h = 3$ und es wird

$$x = \frac{P+8}{2} \quad \text{und} \quad y = \frac{Q+12}{2}$$

werden. Daher wird man die folgenden Auflösungen haben:

$P =$	2	4	8	16	32	64
$Q =$	64	32	16	8	4	2
$x =$	5	6	8	12	20	36
$y =$	38	22	14	10	8	7
$p = 3x - 1 =$	14*	17	23	35*	59	107
$q = 2y - 1 =$	$\cdots$	43	27*	19	15*	13
$r = xy - 1 =$	$\cdots$	131	111*	119*	159*	251

Daher gehen also die befreundeten Zahlen hervor:

$$\begin{cases} 4 \cdot 17 \cdot 43 \\ 4 \cdot 5 \cdot 131 \end{cases}$$

und

$$\begin{cases} 4 \cdot 13 \cdot 107 \\ 4 \cdot 5 \cdot 251. \end{cases}$$

Man setze als zweites $g = 1$, $h = 6$ und es wird

$$x = \frac{P+4}{2} \quad \text{und} \quad y = \frac{Q+24}{2}$$

werden.

$P =$	2	4	8	16	32	64
$Q =$	64	32	16	8	4	2
$x =$	3	4	6	10	18	34
$y =$	44	28	20	16	14	13
$p = 6x - 1 =$	17	23	35*	59	107	203*
$q = 1y - 1 =$	43	27*	19	15*	13	12*
$r = xy - 1 =$	131	111*	119*	159*	251	441*

Also gehen dieselben zwei befreundeten Zahlen hervor wie zuvor.

Also sind daraus die befreundeten Zahlen

$$\begin{cases} 4 \cdot 17 \cdot 43 \\ 4 \cdot 5 \cdot 131 \end{cases} \quad \text{und} \quad \begin{cases} 4 \cdot 13 \cdot 107 \\ 4 \cdot 5 \cdot 251. \end{cases}$$

BEISPIEL 3

§79 Es sei $f = 7$; es wird $\int f = gh = 8$, $e = 28 - 24 = 4$ und

$$PQ = 16 \cdot 8 + 16 \cdot 6 = 224$$

sein. Es sei also zuerst $g = 2$, $h = 4$; es wird also

$$x = \frac{P+8}{4}, \quad y = \frac{Q+16}{4}, \quad p = 4x - 1, \quad q = 2y - 1, \quad r = xy - 1$$

sein.

$P =$	2	4	28	56
$Q =$	56	28	8	4
$x =$	3	4	9	16
$y =$	18	11	6	5
$p = 4x - 1 =$	11	15*	35*	63*
$q = 2y - 1 =$	35*	21*	11	9*
$r = xy - 1 =$	53	43	53	79

Es sei als zweites $g = 1$, $h = 8$; es wird

$$x = \frac{P+4}{4}, \quad y = \frac{Q+32}{4}, \quad p = 8x-1, \quad q = y-1, \quad r = xy-1$$

sein.

$P =$	4	8	28	56
$Q =$	56	28	8	4
$x =$	2	3	8	15
$y =$	22	15	10	9
$8x-1 =$	15*	23	63*	119*
$y-1 =$	21*	14*	9*	8*
$xy-1 =$	43	44*	79	134*

Daher gehen also keine befreundeten Zahlen hervor.

Beispiel 4

§80 Es sei $f = 11$; es wird $gh = 12$, $e = 8$, $PQ = 16 \cdot 12 + 32 \cdot 10 = 512$ sein, oder es wird $(8x-4g)(8y-4h) = 512$ sein, welche Gleichung zu $(2x-g)(2y-h) = 32$ reduziert wird; nachdem diese aufgelöst worden ist, wird $p = hx-1$, $q = gy-1$ und $r = xy-1$ sein. Ob man aber hier $g = 1$, $h = 12$, oder $g = 2$, $h = 6$, oder $g = 3$, $h = 4$ setzt, es gehen keine Primzahlen für p, q und r hervor.

Beispiel 5

§81 Es sei $f = 13$; es wird $gh = 14$, $e = 10$, $PQ = 224 + 40 \cdot 12 = 704$ und $(10x-4g)(10y-4h) = 704$ sein, welche zu $(5x-2g)(5y-2h) = 176$ reduziert wird. Daraus werden aber keine anderen befreundeten Zahlen erhalten als

$$\begin{cases} 4 \cdot 5 \cdot 251 \\ 4 \cdot 13 \cdot 107, \end{cases}$$

welche schon zuvor (§ 78) gefunden worden sind. Zugleich ist aber klar, auch wenn für f größere Primzahlen festgelegt werden, dass keine neuen befreundeten Zahlen hervorgehen, weil ja entweder p oder q einen kleineren Wert erhält, als man für f hätte annehmen können.

Beispiel 5

§82 Es sei $f = 5 \cdot 13$; es wird $gh = 6 \cdot 14 = 84$, $e = 8$, $PQ = 16 \cdot 84 + 32 \cdot 64 = 64 \cdot 53$ und $(8x - 4g)(8y - 4h) = 64 \cdot 53$ oder $(2x - g)(2y - h) = 4 \cdot 53$ sein. Und daher wird man in Primzahlen $p = 43$, $q = 2267$ und $r = 1187$ finden, woher die befreundeten Zahlen

$$\begin{cases} 4 \cdot 43 \cdot 2267 \\ 4 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 1187 \end{cases}$$

sein werden.

Fall 2

§83 Es sei $a = 2^3 = 8$; es wird $b = 8$, $c = 1$ sein; dann wird, nachdem die Zahlen $8pq$ und $8fr$ als befreundet festgelegt worden sind, $e = 8f - 7gh$ sowie

$$(ex - 8g)(ey - 8h) = 64gh + 8e(f - 1)$$

sein, woher Fälle zu erkennen sind, in denen die Zahlen

$$p = hx - 1, \quad q = gy - 1 \quad \text{und} \quad r = xy - 1$$

prim werden.

Beispiel 1

§84 Es sei $f = 11$; es wird $gh = 12$, $e = 4$ sowie

$$(4x - 8g)(4y - 8g) = 64 \cdot 12 + 32 \cdot 10 = 64 \cdot 17$$

oder

$$(x - 2g)(y - 2h) = 4 \cdot 17 = 68$$

sein. Daraus werden aber keine befreundeten Zahlen gefunden.

Beispiel 2

§85 Es sei $f = 13$; es wird $gh = 14$, $e = 6$ sowie

$$(6x - 8g)(6y - 8h) = 64 \cdot 14 + 48 \cdot 12 = 64 \cdot 23$$

oder

$$(3x - 4g)(3y - 4h) = 16 \cdot 23$$

sein; aber auch diese Annahme ist unnütz.

Beispiel 3

§83 Es sei $f = 17$; es wird $gh = 18$, $e = 10$ sowie

$$(10x - 8g)(10y - 8h) = 64 \cdot 18 + 80 \cdot 16 = 64 \cdot 38$$

oder

$$(5x - 4g)(5y - 4h) = 32 \cdot 19$$

sein; und daher gehen die befreundeten Zahlen

$$\begin{cases} 8 \cdot 23 \cdot 59 \\ 8 \cdot 17 \cdot 79 \end{cases}$$

hervor.

Beispiel 4

§87 Die Annahme $f = 11 \cdot 23$ ist ergiebiger; denn ein kleinerer Wert kann für f in zusammengesetzten Zahlen nicht eingesetzt werden; es wird $gh = 12 \cdot 24$, $e = 8$ sein, woher

$$(8x - 8g)(8y - 8h) = 64 \cdot 12 \cdot 24 + 64 \cdot 252$$

oder

$$(x - g)(y - h) = 540$$

ist. Daraus werden aber die folgenden befreundten Zahlen gefunden

$$\begin{cases} 8 \cdot 383 \cdot 1907 \\ 8 \cdot 11 \cdot 23 \cdot 2543 \end{cases} \qquad \begin{cases} 8 \cdot 467 \cdot 1151 \\ 8 \cdot 11 \cdot 23 \cdot 1871 \end{cases} \qquad \begin{cases} 8 \cdot 647 \cdot 719 \\ 8 \cdot 11 \cdot 23 \cdot 1619. \end{cases}$$

Indem man zusammengesetzte Zahlen von dieser Art für f festgelegt, werden darüber hinaus viele andere befreundete Zahlen gefunden.

SCHOLION

§88 Die riesige Anzahl an Kombinationen, welche in diesem Beispiel auftritt, hat mir den Ansatzpunkt geliefert, die Lösung in eine andere Form zu überführen. Weil natürlich

$$e = bf - (b-c)gh, \quad PQ = bbfh + be(f-1) = (ex-bg)(ey-bh)$$

ist, findet man aus den Formeln

$$x = \frac{P+bg}{e} \quad \text{und} \quad y = \frac{Q+bh}{e}$$

die Werte

$$p = \frac{hP+bgh}{e} - 1, \quad q = \frac{gQ+bgh}{e} - 1, \quad r = \frac{PQ + b(hP+gQ) + bbgh}{ee} - 1.$$

Es sei also wegen $gh = \int f$

$$e = bf - (b-c)\int f, \quad L = bb\int f + be(f-1) \quad \text{und} \quad MN = L\int f;$$

es wird

$$p = \frac{M + b\int f}{e} - 1, \quad q = \frac{N + n\int f}{e}, \quad r = \frac{L + b(M+N) + bb\int f}{ee} - 1$$

sein und nun wird die Frage darauf zurückgeführt, dass die Zahl $L\int f$ in die zwei Faktoren M und N aufgelöst wird, von welchen jede der beiden um die Größe $b\int f$ vermehrt durch e teilbar wird und dass die daraus resultierenden Quotienten um die Einheit vermindert Primzahlen sind. Schließlich ist notwendig, dass $r + 1 = \frac{(p+1)(q+1)}{\int f}$ und r eine Primzahl ist. Ich werde also die Rechnung in einigen Fällen illustrieren.

Fall 3

§89 Es sei $a = 2^4 = 16$; es wird $b = 16$, $c = 1$ und

$$e = 16f - 15\int f, \quad L = 256\int f + 16e(f-1) \quad \text{und} \quad MN = L\int f$$

sein. Also müssen die Zahlen

$$p = \frac{M + 16\int f}{e} - 1, \quad q = \frac{N + 16\int f}{e} - 1, \quad r = \frac{L + 256\int f + 16(M+N)}{ee} - 1$$

prim sein, nach Finden von welchen die Zahlen $16pq$ und $16fr$ sein werden.

Beispiel 1

§90 Es sei $f = 17$; es wird

$$\int f = 18, \quad e = 2, \quad L = 104 \cdot 5 \quad \text{und} \quad MN = 1024 \cdot 5 \cdot 18 = 2^{11} \cdot 3^2 \cdot 5,$$

$$p = \frac{M + 288}{2} - 1, \quad q = \frac{N + 288}{2} - 1, \quad r = \frac{512 \cdot 19 + 16(M+N)}{4} - 1$$

sein; oder es sei $M = 2m$, $N = 2n$, dass $mn = 2^9 \cdot 3^2 \cdot 5$ ist; es wird

$$p = m + 143, \quad q = n + 143 \quad \text{und} \quad r = 8(m+n) + 2431$$

sein, welche drei Zahlen prim sein müssen, damit die Zahlen $16pq$ und $16 \cdot 17r$ befreundet sind. Aber dies gelingt auf zwei Weisen, zuerst, wenn $m = 24$, $n = 960$ ist, und als zweites, wenn $m = 96$ und $n = 240$ ist; daher gehen die befreundeten Zahlen

$$\begin{cases} 16 \cdot 167 \cdot 1103 \\ 16 \cdot 17 \cdot 10303 \end{cases} \qquad \begin{cases} 16 \cdot 239 \cdot 383 \\ 16 \cdot 17 \cdot 5119. \end{cases}$$

Beispiel 2

§91 Es sei $f = 19$; es wird

$$\int f = 20, \quad e = 4, \quad L = 128 \cdot 49 \quad \text{und} \quad MN = 512 \cdot 5 \cdot 49 = 2^9 \cdot 5 \cdot 7^2$$

sein. Also

$$p = \frac{M+320}{4} - 1, \quad q = \frac{N+320}{4} - 1, \quad r = \frac{128 \cdot 89 + 16(M+N)}{16} - 1;$$

oder es sei $M = 4m$ und $N = 4n$, dass $mn = 32 \cdot 5 \cdot 49 = 2^5 \cdot 5 \cdot 7^2$; es wird

$$p = m + 79, \quad q = n + 79 \quad \text{und} \quad r = 4(m+n) + 711$$

sein. Daher, wenn $m = 70$, $n = 112$ ist, gehen die befreundeten Zahlen

$$\begin{cases} 16 \cdot 149 \cdot 191 \\ 16 \cdot 19 \cdot 1439. \end{cases}$$

Beispiel 3

§92 Es sei $f = 23$; es wird

$$\int f = 24, \quad e = 8, \quad L = 256 \cdot 5 \cdot 7 \quad \text{und} \quad MN = 2048 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 2^{11} \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$$

$$p = \frac{M + 16 \cdot 24}{8} - 1, \quad q = \frac{N + 16 \cdot 24}{8} - 1, \quad r = \frac{256 \cdot 59 + 16(M+N)}{64} - 1$$

sein; oder es sei $M = 8m$, $N = 8n$ und $mn = 2^5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$; es wird

$$p = m + 47, \quad q = n + 47 \quad \text{und} \quad r = 2(m+n) + 235$$

sein. Daraus entspringen die drei Fälle

$$\begin{cases} m = 56 \\ n = 60 \end{cases} \qquad \begin{cases} m = 42 \\ n = 80 \end{cases} \qquad \begin{cases} m = 6 \\ n = 560 \end{cases}$$

und die befreundeten Zahlen sind

$$\begin{cases} 16 \cdot 103 \cdot 107 \\ 16 \cdot 23 \cdot 467 \end{cases} \qquad \begin{cases} 16 \cdot 89 \cdot 127 \\ 16 \cdot 23 \cdot 479 \end{cases} \qquad \begin{cases} 16 \cdot 53 \cdot 607 \\ 16 \cdot 23 \cdot 1367. \end{cases}$$

Beispiel 4

§93 Es sei $f = 31$; es wird

$$\int f = 32, \quad e = 16, \quad L = 512 \cdot 31 \quad \text{und} \quad MN = 2^{14} \cdot 31,$$

$$p = \frac{M + 16 \cdot 32}{16} - 1, \quad q = \frac{N + 16 \cdot 32}{16} - 1, \quad r = \frac{16(M+N) + 512 \cdot 47}{256} - 1$$

sein. Es sei also $M = 16m$, $N = 16n$, dass $mn = 2^6 \cdot 31$ ist; es wird

$$p = m + 31, \quad q = n + 31, \quad r = m + n + 93$$

sein. Daher gehen aber keine befreundeten Zahlen hervor.

Beispiel 5

§94 Es sei $f = 47$; es wird

$$\int f = 48, \quad e = 32 \quad \text{und} \quad L = 1024 \cdot 5 \cdot 7 \quad \text{und} \quad MN = 2^{14} \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$$

sein, woher

$$p = \frac{M + 16 \cdot 48}{32} - 1, \quad q = \frac{N + 16 \cdot 48}{32} - 1 \quad \text{und} \quad r = \frac{16(M+N) + 1024 \cdot 47}{1024} - 1$$

wird. Es sei $M = 32m$ und $N = 32n$, dass $mn = 2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ ist; es wird

$$p = m + 23, \quad q = n + 23, \quad r = \frac{1}{2}(m+n) + 46$$

sein. Also muss $m + n$ eine doppelte ungerade gerade Zahl sein, damit $\frac{1}{2}(m + n)$ ungerade wird, was passiert, wenn entweder m oder n eine ungerade gerade Zahl ist. Es sei $m = 30$, $n = 56$; die Zahlen

$$\begin{cases} 16 \cdot 53 \cdot 79 \\ 16 \cdot 47 \cdot 89 \end{cases}$$

werden befreundet sein.

Beispiel 6

§94[a] Es sei $f = 17 \cdot 137$; es wird

$$\int f = 18 \cdot 138 = 4 \cdot 27 \cdot 23 = 2484, \quad e = 4$$

$$L = 256 \cdot 2484 + 64 \cdot 2328 = 512 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 73 \quad \text{und} \quad MN = 2048 \cdot 81 \cdot 7 \cdot 23 \cdot 73,$$

$$p = \frac{M + 16 \cdot 2484}{4} - 1, \quad q = \frac{N + 16 \cdot 2484}{4} - 1, \quad r = \frac{512 \cdot 2775 + 16(M+N)}{16} - 1$$

sein. Es sei $M = 4m$, $N = 4n$; es wird $mn = 128 \cdot 81 \cdot 7 \cdot 23 \cdot 73$ und

$$p = m + 9935, \quad q = n + 9935 \quad \text{und} \quad r = 4(m+n) + 88799$$

sein. Aber hier geht der Wert von r immer größer als 10000 hervor, sodass es schwierig ist zu erkennen, ob sie prim ist oder nicht.

Beispiel 7

§95 Es sei $f = 17 \cdot 151$; es wird

$$\int f = 18 \cdot 152 = 16 \cdot 9 \cdot 19 = 276, \quad e = 32,$$

$$L = 1024 \cdot 1967 = 1024 \cdot 7 \cdot 281 \quad \text{sowie} \quad MN = 2^{14} \cdot 9 \cdot 7 \cdot 19 \cdot 281$$

sein. Es sei $M = 32m$, $N = 32n$; es wird $mn = 16 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 19 \cdot 281$ und

$$p = m + 1367, \quad q = n + 1367, \quad r = \frac{1}{2}(m+n) + 2650$$

sein. Es sei $m = \mu$, $n = 8\nu$ sei; es wird $\mu\nu = 9 \cdot 7 \cdot 19 \cdot 281$ und

$$p = 2\mu + 1367, \quad q = 8\nu + 1367, \quad r = \mu + 4\nu + 2650$$

sein. Daher ist zuerst klar, dass weder μ noch ν eine Zahl der Form $3\alpha + 2$ sein kann, dann dass μ nicht auf 9 und ν nicht auf 1 enden kann; nachdem diese Dinge beobachtet worden sind, haben nur die folgenden Auflösungen Geltung:

	*				*	*	
μ	$3 \cdot 281$	$7 \cdot 19$	$21 \cdot 281$	21	$63 \cdot$	3	1
ν	$21 \cdot 19$	$9 \cdot 281$	57	$57 \cdot 281$	19	$399 \cdot 281$	$1197 \cdot 281$

von welchen die, die mit einem Stern gekennzeichnet worden sind, daher ausgeschlossen werden, dass p, q oder r nicht durch 7 teilbar wird. Die dritte Lösung wird aber diese befreundeten Zahlen geben

$$\begin{cases} 16 \cdot 1409 \cdot 129503 \\ 16 \cdot 17 \cdot 151 \cdot 66739, \end{cases}$$

wenn nur die Zahl 129503 prim ist.

Beispiel 8

§96 Es sei $f = 17 \cdot 167$; es wird

$$\int f = 18 \cdot 168 = 16 \cdot 27 \cdot 7 = 3024, \quad e = 64,$$

$$L = 2048 \cdot 1797 = 2048 \cdot 3 \cdot 599 \quad \text{und} \quad MN = 2^{15} \cdot 3^4 \cdot 7 \cdot 599$$

sein. Es sei $M = 64$, $N = 64n$; es wird $mn = 2^3 \cdot 3^4 \cdot 7 \cdot 599$ und

$$p = m + 755, \quad q = n + 755, \quad r = \frac{1}{4}(m+n) + \frac{2173}{2}$$

sein. Es sei $m = 2\mu$, $n = 4\nu$; es wird $\mu\nu = 3^4 \cdot 7 \cdot 599$ und

$$p = 2\mu + 755, \quad q = 4\nu + 755, \quad r = \nu + \frac{\mu+1}{2} + 1086$$

sein. Hier ist es klar, dass $\mu = 4\alpha - 1$ sein muss, damit r keine gerade Zahl wird, und es darf weder $\mu = 3\alpha + 2$ noch $\nu = 3\alpha + 1$ sein. Daraus gehen die befreundeten Zahlen

$$\begin{cases} 16 \cdot 809 \cdot 51071 \\ 16 \cdot 17 \cdot 167 \cdot 13679 \end{cases}$$

hervor.

Fall 4

§97 Es sei entweder $a = 3^3 \cdot 5$ oder $a = 3^2 \cdot 7 \cdot 13$, dass $b = 9$, $c = 2$ ist; es wird

$$e = 9f - 7\int f, \quad L = 81\int f + 9e(f-1) \quad \text{und} \quad MN = L\int f,$$

$$p = \frac{M + 9\int f}{e} - 1, \quad q = \frac{N + 9\int f}{e} - 1, \quad r = \frac{9(M+N) + L + 81\int f}{ee} - 1$$

sein; wenn die Zahlen p, q, r prim waren, werden die Zahlen apq und afr prim sein.

Beispiel

§98 Es sei $f = 7$, $\int f = 8$; es wird

$$e = 7, \quad L = 2 \cdot 27 \cdot 19, \quad MN = 16 \cdot 27 \cdot 19,$$

$$p = \frac{M + 72}{7} - 1, \quad q = \frac{N + 72}{7} - 1, \quad r = \frac{9(M+N) + 2 \cdot 27 \cdot 31}{49} - 1.$$

Daher entspringen nach Setzen von $M = 54$, $N = 152$ die befreundeten Zahlen

$$\begin{cases} a \cdot 17 \cdot 31 \\ a \cdot 7 \cdot 71 \end{cases} \text{oder} \quad \begin{cases} 3^3 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 31 \\ 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 71. \end{cases}$$

Problem 4

§99 *Befreundete Zahlen der Form agpq und ahr zu finden, wo p, q, r Primzahlen sind, aber g und h entweder prim oder zusammengesetzt zusammen mit dem gemeinsamen Faktor a gegeben sind.*

Lösung

Aus dem gemeinsamen Faktor a suche man in kleinsten Termen den Bruch $\frac{b}{c} = \frac{a}{2a - \int a}$, dann sei $\frac{\int g}{\int h} = \frac{m}{n}$ und aus der ersten Eigenschaft von befreundeten Zahlen wird

$$(p+1)(q+1)\int g = (r+1)\int h \quad \text{oder} \quad r + 1 = \frac{m}{n}(p+1)(q+1)$$

sein. Die andere Eigenschaft hingegen liefert

$$(r+1)\int a \cdot \int h = a(gpq + hr);$$

oder wegen $\frac{\int a}{a} = \frac{2b - c}{b}$ wird

$$(r+1)(2b-c)\int h = b(gpq+hr)$$

und nach Einsetzen des Wertes für r

$$m(2b-c)(p+1)(q+1)\int h = b(ngpq + mh(p+1)(q+1) - nh)$$

sein. Es sei der Kürze wegen $p+1 = x$, $q+1 = y$; es wird

$$m(2b-c)xy\int h = b(mhxy + ngxy - ngx - ngy + ng - nh)$$

oder

$$\left(mbh + nbg - 2mb\int h + mc\int h\right)xy - nbgx - nbgy = nb(h-g)$$

sein. Man setze der Kürze wegen

$$e = b(mh+ng) - (2b-c)m\int h$$

und es wird

$$eexy - nbgex - nbgey + nnbbgg = nnbbgg + nb(h-g)e$$

oder

$$(ex - nbg)(ey - nbg) = nnbbgg + nb(h-g)e$$

sein. Man setze also $nnbbgg + nb(h-g)e = MN$ und es wird

$$x = \frac{M+nbg}{e} \quad \text{und} \quad y = \frac{N+nbg}{e}$$

oder

$$p = \frac{M+nbg}{e} - 1, \quad q = \frac{N+nbg}{e} - 1, \quad r = \frac{m}{n}xy - 1$$

werden. Wenn diese drei Zahlen p, q und r prim waren, werden die Zahlen $agpq$ und ahr befreundet sein, solange die Faktoren jeder der beiden teilerfremd zueinander sind.

Korollar

§100 Wenn g und h Primzahlen sind, wird $\frac{m}{n} = \frac{g+1}{h+1}$ sein; es sei also $g = km - 1$ und $h = kn - 1$; es wird $\int h = kn$ sein, woher

$$e = b(2kmn - m - n) - (2b - c)kmn = ckmn - b(m+n),$$
$$MN = nb(nb(km-1)^2 + k(n-m)e) = (ex - bn(km-1))(ey - bn(km-1))$$

und

$$p = x - 1, \quad q = y - 1 \quad \text{sowie} \quad r = \frac{m}{n}xy - 1$$

werden wird.

Fall 1

§101 Es sei $m = 1$, $n = 3$, also $g = k - 1$, $h = 3k - 1$ und es wird

$$e = 3ck - 4b \quad \text{und} \quad MN = 3b(3b(k-1)^2 + 2ke)$$

und daher

$$x = \frac{M + 3b(k-1)}{e}, \quad y = \frac{N + 3b(k-1)}{e}$$

und schließlich $p = x - 1$, $q = y - 1$ und $r = \frac{1}{3}xy - 1$ sein.

Beispiel 1

§102 Es sei $a = 4$, $b = 4$, $c = 1$; es wird

$$e = 3k - 16 \quad \text{und} \quad MN = 12(12(k-1)^2 + 2ke)$$

und

$$x = \frac{M + 12(k-1)}{e} \quad \text{und} \quad y = \frac{N + 12(k-1)}{e}$$

sein. Hier kann gesetzt werden:

I. $k = 6$ und es wird $g = 5$, $h = 17$ und $e = 2$ werden, aber daraus wird nichts erreicht.

II. $k = 8$ und es wird $g = 7$, $h = 23$ und $e = 8$, $MN = 12(12 \cdot 49 + 128)$ oder $MN = 16 \cdot 3 \cdot 179 = (8x - 84)(8y - 84)$ und daher $3 \cdot 179 = (2x - 21)(2y - 21)$ werden, woraus gleichermaßen nichts folgt.

Beispiel 2

§103 Es sei $a = 8$, $b = 8$, $c = 1$; es wird

$$e = 3k - 32, \quad MN = 24(24(k-1)^2 + 2ke)$$

oder

$$MN = 48(15kk - 56k + 12) = (ex - 24(k-1))(ey - 24(k-1))$$

sein. Aber auch hieraus lässt sich nichts folgern.

Fall 2

§104 Es sei $m = 3$, $n = 1$; es wird

$$e = 3ck - 4b \quad \text{und} \quad g = 3k - 1, \quad h = k - 1,$$
$$MN = b(b(3k-1)^2 - 2ke) = (ex - b(3k-1))(ey - b(3k-1))$$

sowie $p = x - 1$, $q = y - 1$ und $r = 3xy - 1$ sein.

Beispiel 1

§105 Es sei $a = 10$, $b = 5$, $c = 1$; es wird

$$e = 3k - 20 \quad \text{und} \quad 5(5(3k-1)^2 - 2ke) = (ex - 5(3k-1))(ey - 5(3k-1))$$

sein. Wenn man hier $k = 8$ setzt, wird $5 \cdot 29 \cdot 89 = (4x - 115)(4y - 115)$ sein. Daher geht $x = 30$, $y = 674$, $3xy = 60660$ hervor und die befreundeten Zahlen werden

$$\begin{cases} 10 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 673 \\ 10 \cdot 7 \cdot 60659 \end{cases}$$

sein.

Beispiel 2

§106 Es sei $a = 3^3 \cdot 5$, $b = 9$, $c = 2$; es wird

$$e = 6k - 36 \quad \text{und} \quad 9(3k-1)^2 - 2ke = \left(\frac{1}{3}ex - 3(3k-1)\right)\left(\frac{1}{3}ey - 3(3k-1)\right)$$

sein. Nun werde $k = 8$; es wird $e = 12$ und $3 \cdot 1523 = (4x - 69)(4y - 49)$ und daher entspringt $x = 18$, $y = 398$, $3xy = 21492$ und die Zahlen $g = 23$, $h = 7$, $p = 17$, $q = 397$, $r = 21491$ werden prim und die Zahlen

$$\begin{cases} 3^3 \cdot 5 \cdot 23 \cdot 17 \cdot 397 \\ 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 21491 \end{cases}$$

befreundet sein.

Scholion

§107 Aus diesen Beispielen wird der Gebrauch dieses Problems beim Finden von befreundeten Zahlen hinreichend klar erkannt; aber wegen der allzu großen Freiheit des Ansatzes ist es nicht wenig unangenehm, nach den hier angegebenen Lehrern alle Fälle durchzugehen. Weil es also genügt, diese Methode angegeben zu haben und ihre Anwendung gezeigt zu haben, halte ich mit ihr nicht länger auf, sondern ich schreite zur Erläuterung der letzten Methode, mit deren Hilfe sich befreundete Zahlen finden lassen, die ich freilich benutzt habe, voran. Sie ist aber auf die einzigartigen Eigenschaften, derer sich die Zahlen in Bezug auf die Teilersumme erfreuen, welche ich an entsprechender Stelle erklären werde, damit das Vorausschicken mehrerer Lemmata keine Unannehmlichkeiten verursacht. Nachdem diese Dinge aber erklärt worden sind, wird es nicht schwierig sein, viele andere sich auf diese Klasse beziehende Probleme aufzulösen.

Problem 5

§108 *Befreundete Zahlen der Form zap und zbq zu finden, wo die Faktoren a und b gegeben sind, p und q Primzahlen sind und er gemeinsame Faktor z ausfindig gemacht werden muss.*

LÖSUNG

Es sei $\int a : \int b = m : n$, und weil $\int a \cdot (p+1) = \int b \cdot (q+1)$ sein muss, wird $m(p+1) = n(q+1)$ sein. Man setze $p+1 = nx$ und $q+1 = mx$ und die Zahlen

$$za(nx-1) \quad \text{und} \quad zb(mx-1)$$

werden befreundet sein, wo freilich verlangt ist, dass $mx-1$ und $nx-1$ Primzahlen sind. Weil nun die Summe der Teiler jeder der beiden dieselbe $= nx \int a \cdot \int z = mx \int b \cdot \int z$ ist, ist es notwendig, dass sie gleich der Summe der Zahlen, $z((na+mb)x - a - b)$, ist. Daher wird man diese Gleichung erhalten

$$\frac{z}{\int z} = \frac{nx \int a}{(na+mb)x - a - b}.$$

Damit nun aus dieser Gleichung der Wert von z gefunden werden kann, kürze man den Bruch $\frac{nx \int a}{(na+mb)x-a-b}$ maximal, welcher $= \frac{r}{s}$ sei, sodass man $\frac{z}{\int z} = \frac{r}{s}$ hat, und daher sind die folgenden Dinge zu bemerken. Zuerst, dass z entweder r selbst oder einem Vielfachen dessen gleich ist, sagen wir kr. Im ersten Fall, wenn $z = r$ ist, wird $\int z = s$ und deshalb $s = \int r$ sein. Im zweiten Fall, wenn $z = kr$ ist, wird $\int z = ks = \int kr$ sein. Aber was auch immer k ist, es wird $\frac{\int kr}{\int r} > k$; denn $\int kr$ enthält alle Teiler von r jeweils mit k multipliziert und darüber hinaus die Teiler von kr, welche nicht durch k teilbar sind, und daher wird $\int kr > k \int r$ sein. Weil also $\int z > k \int r$ ist, wird auch $ks > k \int r$ oder $s > \int r$ sein. Wenn also im Bruch $\frac{r}{s}$ auch $s = \int r$ war, wird $z = r$ sein; wenn aber $s > \int r$ ist, wird z gleich einem gewissen Vielfachen von r gleich sein. Daher ist klar, wenn $s < \int r$ ist, dass die Gleichung $\frac{z}{\int z} = \frac{r}{s}$ unmöglich ist und in diesem Fall keine befreundeten Zahlen gefunden werden können. Weil weiter

$$\frac{\int z}{z} = \frac{na+mb}{n \int a} - \frac{a+b}{nx \int a} = \frac{a}{\int a} + \frac{b}{\int b} - \frac{a+b}{nx \int a}$$

ist, wird wegen $\frac{a}{\int a} < 1$ und $\frac{b}{\int b} < 1$ auch $\frac{\int z}{z} < 2 - \frac{a+b}{nx \int a}$ und daher um vieles mehr $\frac{z}{\int z} > \frac{1}{2}$ sein, sodass die Zahl z immer defizient ist. Und daher ist klar, dass die Gleichung $\frac{z}{\int z} = \frac{r}{s}$ immer so beschaffen sein wird, dass $\frac{r}{s} > \frac{1}{2}$ oder

$s < 2r$ ist. Wenn $\int r = s$ ist, wird $\int r < 2r$ sein, und wenn $s > \int r$ ist, wird um vieles mehr $\int r < 2r$ sein. In jedem der beiden Fälle wird r also defizient sein. Wenn also x als unbekannte Zahl betrachtet wird, muss nach Vorlegen der Gleichung $\frac{z}{\int z} = \frac{nx \int a}{(na+mb)x-a-b}$ der Wert von x so bestimmt werden, dass nach Kürzen des Bruchs $\frac{nx \int a}{(na+mb)x-a-b}$ auf kleinste Terme $\frac{r}{s}$ die Zahl r defizient wird und dass entweder $s = \int r$ oder $s > \int r$ ist.

Nachdem diese Bedingungen betrachtet worden sind, löse man so r wie s in ihre einfachen Primfaktoren auf, dass eine Gleichung von dieser Art hervorgeht

$$\frac{z}{\int z} = \frac{A^\alpha B^\beta C^\gamma}{E^\varepsilon F^\zeta G^\eta};$$

aber dann lege man sukzessiv entweder A^α oder eine höhere Potenz von A als Faktor von z fest oder man setze man $z = P \cdot A^{\alpha+\nu}$; es wird $\int z = \int A^{\alpha+\nu} \cdot \int P$ und $\frac{z}{\int z} = \frac{PA^{\alpha+\nu}}{\int A^{\alpha+\nu} \cdot \int P}$ und daher

$$\frac{P}{\int P} = \frac{B^\beta C^\gamma \int A^{\alpha+\nu}}{A^\nu E^\varepsilon F^\zeta G^\eta}$$

sein. Und in gleicher Weise setze man weiter $P = B^{\beta+\nu}Q$ und man schreite auf diese Weise fort, bis man schließlich zu einer Gleichung von dieser Form $\frac{Z}{\int Z} = \frac{u}{\int u}$ gelangt, aus welcher man dann $Z = u$ habe. Oftmals ist diese Operation freilich nicht von Erfolg gekrönt, sondern für jeden sich ergebenden Fall wird es leichter sein, die Operation an Beispielen zu lehren als über Vorschriften.

Beispiel 1

§109 Es sei $a = 3$, $b = 1$; es wird $\int a = 4$, $\int b = 1$ und $m = 4$, $n = 1$ sein und die Zahlen

$$3(x-1)z \quad \text{und} \quad (4x-1)z$$

werden befreundet sein, wenn $x - 1$ und $4x - 1$ Primzahlen sind und

$$\frac{z}{\int z} = \frac{4x}{7x-4}.$$

Aber hier ist zuerst klar, wenn 4 nicht aus dem Zähler geworfen wird, dass wegen $\int 4x = 7 \int x$ auch $7x - 4 < \int 4x$ sein wird. Also ist es notwendig, dass $7x - 4$ eine gerade Zahl ist. Man setze $x = 4p$; es wird

$$\frac{z}{\int z} = \frac{4p}{7p-1}$$

sein. Nun sei $7p - 1$ eine Gerade Zahl, indem man $p = 2q + 1$ setzt; es wird

$$\frac{z}{\int z} = \frac{2(2q+1)}{7q+3}$$

und $x = 8q + 4$ sowie

$$x - 1 = 8q + 3, \quad 4x - 1 = 32q + 15$$

sein. Daher kann q kein Vielfaches von drei sein, damit $x - 1$ nicht durch 3 teilbar wird. Es wird also entweder $q = 3r + 1$ oder $q = 3r - 1$ sein; im ersten Fall wird $2q + 1 = 6r + 3$ und z müsste durch 3 teilbar sein, was freilich gleichermaßen nicht passieren kann, weil in deren anderen gesuchten Zahl $3(x - 1)z$ schon der Faktor 3 enthalten ist. Es sei also $q = 3r - 1$; es wird

$$\frac{z}{\int z} = \frac{2(6r-1)}{21r-4}$$

sowie $x = 24r - 4$,

$$x - 1 = 24r - 5 \quad \text{und} \quad 4x - 1 = 96r - 17$$

sein. Weil aber z nicht den Faktor 3 haben kann, außer zwei wird aus dem Zähler $2(6r - 1)$ herausgeworfen wird, wird sie durch 2 teilbar sein und für $z = 2y$ gesetzt würde

$$\frac{2y}{3\int y} = \frac{2(6r-1)}{21r-4} \quad \text{und} \quad \frac{y}{\int y} = \frac{3(6r-1)}{21r-4}$$

werden und daher wäre auch y und daher auch z durch 3 teilbar, was nicht geschehen kann. Deswegen muss diese zwei aus dem Zähler herausgeworfen werden, indem man $r = 2s$ setzt, dass

$$x - 1 = 48s - 5, \quad 4x - 1 = 192s - 17$$

ist, und es wird

$$\frac{z}{\int z} = \frac{12s-1}{21s-2}$$

sein.

Nun sei s eine ungerade Zahl, wegen der ungeraden Zahl z wird auch $\int z = k(21s-2)$ eine ungerade Zahl werden, woraus folgt, dass die Zahl z ein Quadrat sein wird; wenn aber s eine gerade Zahl ist, wird der gemeinsame Faktor z kein Quadrat sein. Man entwickle also die Werte von s, welche $x-1 = 48s-5$ und $4x-1 = 192-17$ zu Primzahlen machen, und man untersuche, ob der Gleichung $\frac{z}{\int z} = \frac{12s-1}{21s-2}$ Genüge geleistet werden kann.

Es sei $s = 7$; es wird $x-1 = 331$, $4x-1 = 1327$ und $\frac{z}{\int z} = \frac{83}{145}$ sein. Weil nun z ein Quadrat sein muss, setze man $z = 83^2 A$; es wird $\int z = 367 \cdot 19 \int A$ und $\frac{A}{\int A} = \frac{367 \cdot 19}{5 \cdot 29 \cdot 83}$ sein. Nun kann aber ein Faktor von A wegen $\int 19^2 = 3 \cdot 127$ nicht als 19^2 festgelegt werden; denn 3 ginge als Faktor von A hervor; aber durch Nehmen von höheren Potenzen gelangt man bald zu so großen Zahlen, dass es schnell klar wird, dass die Aufgabe nicht bewältigt werden kann.

Es sei $s = 12$; es wird $x-1 = 571$, $4x-1 = 2287$ und $\frac{z}{\int z} = \frac{11 \cdot 13}{2 \cdot 125}$ sein, welche weder durch Annehmen von 11^2 noch von 13 als Faktoren von z aufgelöst werden kann.

Und in der Tat war es mir nicht möglich, aus größeren Werten für s irgendetwas zu leisten.

Beispiel 2

§110 Es sei $a = 5$, $b = 1$; es wird $\int a = 6$, $\int b = 1$, $m = 6$, $n = 1$ sein und die Zahlen

$$5(x-1)z \quad \text{und} \quad (6x-1)z$$

werden befreundet sein und man wird

$$\frac{z}{\int z} = \frac{6x}{11x-6}$$

haben. Damit diese Gleichung möglich ist, muss aus dem Zähler $6x$ entweder zwei oder drei herausgeworfen werden, weil ansonsten der Zähler abundant bliebe. Wir werden also zwei Fälle zu entwickeln haben.

I. Man werfe zuerst drei aus dem Zähler heraus, indem man $x = 3p$ setze; es wird

$$\frac{z}{\int z} = \frac{6p}{11p - 2}$$

sein; nun setze man aber weiter $p = 3q + 1$ und es wird

$$\frac{z}{\int z} = \frac{2(3q+1)}{11q+3}$$

sein und wegen $x = 9q + 3$ müssen die Zahlen

$$x - 1 = 9q + 2 \quad \text{und} \quad 6x - 1 = 54q + 17$$

prim sein, wo klar ist, dass q eine ungerade Zahl sein muss. Es sei also $q = 2r - 1$; es wird

$$x - 1 = 18r - 7, \quad 6x - 1 = 108r - 37 \quad \text{und} \quad \frac{z}{\int z} = \frac{2(6r-2)}{22r-8} = \frac{2(3r-1)}{11r-4}$$

sein. Man entwickle nun die Fälle, in denen $18r - 7$ und $108r - 37$ Primzahlen werden, welche sein werden:

1) $r = 1$; es wird

$$x - 1 = 11, \quad 6x - 1 = 71 \quad \text{und} \quad \frac{z}{\int z} = \frac{2 \cdot 2}{7} = \frac{4}{7}$$

sein. Weil also hier $7 = \int 4$ ist, wird $z = 4$ sein und die Zahlen

$$\begin{cases} 4 \cdot 5 \cdot 11 \\ 4 \cdot 71 \end{cases}$$

werden befreundet sein, welche wir schon gefunden haben.

2) $r = 2$; es wird

$$x - 1 = 29, \quad 6x - 1 = 179 \quad \text{und} \quad \frac{z}{\int z} = \frac{2 \cdot 5}{2 \cdot 9} = \frac{5}{9}$$

sein. Aber z kann nicht den Faktor 5 haben.

3) $r = 5$; es wird

$$x - 1 = 83, \quad 6x - 1 = 503 \quad \text{und} \quad \frac{z}{\int z} = \frac{4 \cdot 7}{3 \cdot 17}$$

sein; aber hier ist $3 \cdot 17 < \int 4 \cdot 7$.

4) $r = 8$; es wird

$$x - 1 = 137, \quad 6x - 1 = 827 \quad \text{und} \quad \frac{z}{\int z} = \frac{23}{2 \cdot 3 \cdot 7}$$

sein. Man setze $z = 23P$; es wird

$$\int z = 24 \int P \quad \text{und} \quad \frac{P}{\int P} = \frac{24}{23} \cdot \frac{z}{\int z} = \frac{4}{7}$$

sein, woher $P = 4$ und $z = 4 \cdot 23$ ist, welche Operatorion ich kurz so darstelle

$$\frac{z}{\int z} = \frac{23}{2 \cdot 3 \cdot 7} \boxed{\frac{23}{24}} \frac{4}{7} \boxed{\frac{4}{7}}$$

daher wird $z = 4 \cdot 23$ und daher werden die Zahlen

$$\begin{cases} 4 \cdot 23 \cdot 5 \cdot 137 \\ 4 \cdot 23 \cdot 827 \end{cases}$$

befreundet sein. Die übrigen Werte, soweit ich sie freilich untersucht habe, geben keine befreundeten Zahlen.

II. Man werfe zwei aus dem Nenner heraus, indem man $x = 2p$ setzt; es wird

$$\frac{z}{\int z} = \frac{6p}{11p - 3}$$

sein. Nun sei $p = 2q + 1$; es wird

$$\frac{z}{\int z} = \frac{3(2q + 1)}{11q + 4}$$

sein und wegen $x = 4q + 2$ werden

$$x - 1 = 4q + 1, \quad 6x - 1 = 24q + 11$$

Primzahlen sein müssen; daher kann q nicht $= 3\alpha - 1$ sein. Weil weiter z nicht durch 5 teilbar sein darf, darf weder $2q + 1$ noch $4q + 1$ noch $24q + 1$ durch 5 teilbar sein, woher die Fälle $q = 5\alpha + 2$, $q = 5\alpha + 1$ ausgeschlossen werden. Nachdem also diese und andere Ausgangswerte von q verworfen worden sind, die für $x - 1$ und $6x - 1$ keine Primzahlen liefern, wird sich die Rechnung so verhalten:

q	$x - 1$	$6x - 1$	$\frac{z}{\int z}$
3	13	83	$\frac{3 \cdot 7}{37}$ gibt nichts
4	17	107	$\frac{3 \cdot 9}{48} = \frac{9}{16}\boxed{\frac{9}{13}}\frac{13}{16}\boxed{\frac{13}{14}}\frac{7}{8}\boxed{\frac{7}{8}}$ $z = 9 \cdot 7 \cdot 13$,
			entweder $\frac{9}{16}\boxed{\frac{27}{40}}\frac{5}{6}\boxed{\frac{5}{6}}$, also $z = 27 \cdot 5$; aber dieser ist
			wegen $a = 5$ unnütz.
			Also werden die befreundeten Zahlen sein:
			$\begin{cases} 9 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 5 \cdot 17 \\ 9 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 107. \end{cases}$

q	$x-1$	$6x-1$	$\frac{z}{\int z}$
9	37	227	$\frac{3\cdot 19}{103}$ gibt nichts.
10	41	251	$\frac{3\cdot 21}{114} = \frac{3\cdot 7}{2\cdot 19}\ \boxed{\frac{7^2}{3\cdot 19}}\ \frac{3^2}{2\cdot 7}\ \boxed{\frac{3^2}{2\cdot 7}}\ \frac{13}{14}\ \boxed{\frac{13}{14}}$ Also $z = 3^2\cdot 7^2\cdot 13$ und die befreundeten Zahlen werden sein: $\begin{cases} 3^2\cdot 7^2\cdot 13\cdot 5\cdot 41 \\ 3^2\cdot 7^2\cdot 13\cdot 251. \end{cases}$
18	73	443	$\frac{3\cdot 37}{202} = \frac{3\cdot 37}{2\cdot 101}$ gibt nichts.
24	97	587	$\frac{3\cdot 49}{268} = \frac{3\cdot 49}{4\cdot 67}$ gibt nichts.
28	113	683	$\frac{3\cdot 57}{312} = \frac{9\cdot 19}{8\cdot 39} = \frac{3\cdot 19}{8\cdot 13}$ gibt nichts.
34	137	827	$\frac{3\cdot 69}{378} = \frac{23}{2\cdot 21} = \frac{23}{2\cdot 3\cdot 7}\ \boxed{\frac{23}{24}}\ \frac{4}{7}\ \boxed{\frac{4}{7}}$ $\quad z = 4\cdot 23\quad$ wie zuvor.
39	157	947	$\frac{3\cdot 79}{433}$ gibt nichts.
45	181	1091	$\frac{3\cdot 91}{499} = \frac{3\cdot 7\cdot 13}{499}$
48	193	1163	$\frac{3\cdot 97}{532} = \frac{3\cdot 97}{4\cdot 7\cdot 19} = \frac{3\cdot 97}{4\cdot 133}\ \boxed{\frac{97}{2\cdot 7^2}}\ \frac{3\cdot 7}{2\cdot 19}\ \boxed{\frac{7^2}{3\cdot 19}}\ \frac{3^2}{2\cdot 7}\ \boxed{\frac{3^2}{13}}\ \frac{13}{14}\ \boxed{\frac{13}{14}}$ Also $z = 3^2\cdot 7^2\cdot 13\cdot 17$ und die befreundeten Zahlen sind: $\begin{cases} 3^2\cdot 7^2\cdot 13\cdot 97\cdot 5\cdot 193 \\ 3^2\cdot 7^2\cdot 13\cdot 97\cdot 1163. \end{cases}$

q	$x-1$	$6x-1$	$\frac{z}{\int z}$
49	197	1187	$\frac{3\cdot 99}{543} = \frac{9\cdot 11}{181}$
60	241	1451	$\frac{3\cdot 121}{664} = \frac{3\cdot 11^2}{8\cdot 83}$
69	277	1667	$\frac{3\cdot 139}{763}$
79	317	1907	$\frac{3\cdot 159}{873} = \frac{53}{97}$
84	337	2027	$\frac{3\cdot 169}{928} = \frac{3\cdot 169}{8\cdot 116} = \frac{3\cdot 169}{32\cdot 29}$
93	373	2243	$\frac{3\cdot 187}{1027} = \frac{3\cdot 11\cdot 17}{13\cdot 79}$
100	401	2411	$\frac{3\cdot 201}{1104} = \frac{3\cdot 67}{368} = \frac{3\cdot 67}{16\cdot 23}$
244	977	5867	$\frac{3\cdot 489}{2688} = \frac{3\cdot 163}{128\cdot 7}\ \boxed{\frac{163}{4\cdot 41}}\ \frac{3\cdot 41}{32\cdot 7}\ \boxed{\frac{41}{2\cdot 3\cdot 7}}\ \frac{3^2}{16}\ \boxed{\frac{3^2}{13}}\ \frac{13}{16}\ \boxed{\frac{13}{14}}\ \frac{7}{8}\ \boxed{\frac{7}{8}}$
			Also $z = 3^2\cdot 7\cdot 13\cdot 41\cdot 163$ und die befreundeten Zahlen sind:
			$\begin{cases} 3^2\cdot 7\cdot 13\cdot 41\cdot 163\cdot 5\cdot 977 \\ 3^2\cdot 7\cdot 13\cdot 41\cdot 5867. \end{cases}$

BEISPIEL 3

§111 Es sei $a = 7$, $b = 1$; es wird $\int a = 8$, $\int b = 1$, $m = 8$, $n = 1$ sein und die Zahlen

$$7(x-1)z \quad \text{und} \quad (8x-1)z$$

sind befreundet, während

$$\frac{z}{\int z} = \frac{8x}{15x - 8}$$

ist. Und zuerst muss x freilich eine gerade Zahl sein; man setze also $x = 2p$; es wird

$$x - 1 = 2p - 1, \quad 8x - 1 = 16p - 1$$

und

$$\frac{z}{\int z} = \frac{8p}{15p - 4}$$

sein; diese Gleichung ist unmöglich, außer die Potenz von zwei Im Zähler wird gekürzt, weil $15p - 4 < \int 8p$ ist. Also werde $p = 4q$, dass

$$x = 8q, \quad x - 1 = 8q - 1, \quad 8x - 1 = 64q - 1$$

und

$$\frac{z}{\int z} = \frac{8q}{15q - 1}$$

ist. Nun sei $q = 2r + 1$; es wird

$$\frac{z}{\int z} = \frac{4(2r + 1)}{15r + 7}$$

und

$$x - 1 = 16r + 7, \quad 8x - 1 = 128r + 63$$

sein; damit keine von diesen Zahlen durch 3 teilbar ist, wird r weder $= 3\alpha - 1$ noch $= 3\alpha$ sein. Es sei also $r = 3s + 1$; es wird

$$\frac{z}{\int z} = \frac{4(6s + 3)}{45s + 22} \quad \text{oder} \quad \frac{z}{\int z} = \frac{4 \cdot 3(2s + 1)}{45s + 22}$$

und

$$x - 1 = 48s + 23, \quad 8x - 1 = 384s + 191$$

sein. Nun muss entweder drei oder vier aus dem Zähler herausgeworfen werden. Aber drei kann nicht herausgeworfen werden, weil der Zähler nie durch 3 teilbar ist; man werfe also vier heraus, wofür ich $s = 2t$ setze, und es wird

$$\frac{z}{\int z} = \frac{2 \cdot 3(4t+1)}{45t+11}$$

sein; nun sei $t = 2u - 1$; es wird

$$\frac{z}{\int z} = \frac{3(8u-3)}{45u-17}$$

sein; aber es ist $s = 4u - 2$ und daher müssen die Zahlen

$$x - 1 = 192u - 73, \quad 8x - 1 = 1536u - 577$$

prim sein.

u	$x-1$	$8x-1$	$\frac{z}{\int z}$
5	887	7103	$\frac{3\cdot 37}{208} = \frac{3\cdot 37}{16\cdot 13}\boxed{\frac{37}{2\cdot 19}}\,\frac{3\cdot 19}{8\cdot 13}\boxed{\frac{19}{4\cdot 5}}\,\frac{3\cdot 5}{2\cdot 13}\boxed{\frac{5}{2\cdot 5}}\,\frac{3^2}{13}\boxed{\frac{3^2}{13}}$ Also $z = 3^2 \cdot 5 \cdot 19 \cdot 37$ und die befreundeten Zahlen werden sein: $\begin{cases} 3^2 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 41 \cdot 163 \cdot 5 \cdot 977 \\ 3^2 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 41 \cdot 5867. \end{cases}$
11	2039	16319	$\frac{3\cdot 5\cdot 17}{2\cdot 239}$
13	2423	19391	$\frac{3\cdot 101}{8\cdot 71}$
26	4919	39359	$\frac{3\cdot 205}{8\cdot 1153}$.

BEISPIEL 4

§112 Es sei $a = 11$, $b = 1$; es wird $\int a = m = 12$, $\int b = n = 1$ sein, die gesuchten Zahlen

$$11(x-1)z \quad \text{und} \quad (12x-1)z$$

sowie

$$\frac{z}{\int z} = \frac{12x}{23x-12}.$$

Hier muss aus dem Zähler entweder 3 oder 4 herausgeworfen werden.

I. Man werfe 3 heraus; man setze $x = 3p$, es wird

$$\frac{z}{\int z} = \frac{12p}{23p-4}$$

und $p = 3q - 1$ sein; es wird

$$\frac{z}{\int z} = \frac{4(3q-1)}{23q-9}$$

sein und wegen $x = 9q - 3$ muss q ungerade sein. Es sei $q = 2r + 1$, dass $x = 18r + 6$ ist; es wird

$$\frac{z}{\int z} = \frac{4(6r+2)}{46r+14} = \frac{4(3r+1)}{23r+7}$$

und

$$x - 1 = 18r + 5, \quad 12x - 1 = 216r + 71$$

sein.

r	$x-1$	$12x-1$	$\frac{z}{\int z}$
0	5	71	$\frac{4}{7}$, $z=4$; die befreundeten Zahlen: $\begin{cases} 4\cdot 11\cdot 5 \\ 4\cdot 71. \end{cases}$
2	41	503	$\frac{4\cdot 7}{53}$
3	59	719	$\frac{4\cdot 10}{76}=\frac{2\cdot 5}{19}$ unmöglich
6	113	1367	$\frac{4\cdot 19}{145}=\frac{4\cdot 19}{5\cdot 29}$ unmöglich.
7	131	1583	$\frac{4\cdot 22}{168}=\frac{11}{21}=\frac{11}{3\cdot 7}\ \boxed{\frac{11}{12}}\ \frac{4}{7}\ \boxed{\frac{4}{7}}$
			aber wegen des Faktors 11 hat dieser Wert von z keine Geltung.

II. Man werfe den Faktor 4 heraus und man setze $x = 4p$, dass

$$\frac{z}{\int z} = \frac{12p}{23p-3}$$

ist. Nun sei $p = 4q+1$; es wird

$$\frac{z}{\int z} = \frac{3(4q+1)}{23q+5}$$

sein und wegen $x = 16q+4$ müssen die Zahlen

$$x-1 = 16q+3 \quad \text{und} \quad 12x-1 = 192q+47$$

prim sein; daher werden die Werte $q = 3\alpha$ ausgeschlossen.

q	$x-1$	$12x-1$	$\frac{z}{\int z}$
0	3	47	$\frac{3}{5}$ unmöglich.
1	19	239	$\frac{3\cdot5}{4\cdot7}\ \boxed{\frac{5}{2\cdot3}}\ \frac{3^2}{14}\ \boxed{\frac{3^2}{13}}\ \frac{13}{14}\ \boxed{\frac{13}{14}}$; $z = 3^2\cdot5\cdot13$ und die befreundeten Zahlen werden sein: $\left\{\begin{array}{l} 3^2\cdot5\cdot13\cdot11\cdot19 \\ 3^2\cdot5\cdot13\cdot239. \end{array}\right.$
13	211	2543	$\frac{3\cdot53}{16\cdot19}\ \boxed{\frac{53}{2\cdot27}}\ \frac{81}{8\cdot19}\ \boxed{\frac{243}{4\cdot7\cdot19}}\ \frac{7\cdot13}{2\cdot3\cdot19}\ \boxed{\frac{13}{2\cdot7}}\ \frac{7^2}{3\cdot19}\ \boxed{\frac{7^2}{3\cdot19}}$ Also $z = 3^5\cdot7^2\cdot13\cdot53$ und die befreundeten Zahlen werden sein: $\left\{\begin{array}{l} 3^5\cdot7^2\cdot13\cdot53\cdot11\cdot211 \\ 3^5\cdot7^2\cdot13\cdot53\cdot2543. \end{array}\right.$

Beispiel 5

§113 Es sei $a = 5$, $b = 17$ und die Zahlen

$$5(3x-1)z \quad \text{und} \quad 17(x-1)z$$

seien befreundet; es wird

$$\frac{z}{\int z} = \frac{18x}{32x-22} = \frac{9x}{16x-11}$$

sein. Weil x eine gerade Zahl sein muss, setze man $x = 2p$; es wird

$$\frac{z}{\int z} = \frac{18p}{32p-11}$$

sein und aus dem Zähler $18p$ muss entweder 2 oder 3^2 herausgeworfen werden, damit die Zahl nicht abundant ist. Aber der Faktor 2 kann nicht herausgeworfen werden; man werfe aus den Faktor 9 heraus. dafür setze man $p = 9q + 4$, dass $x = 18q + 8$ und

$$x - 1 = 18q + 7 \quad \text{und} \quad 3x - 1 = 54q + 23$$

ist; es wird

$$\frac{z}{\int z} = \frac{2(9q + 4)}{32q + 13}$$

sein.

q	$x - 1$	$3x - 1$	$\frac{z}{\int z}$
0	7	23	$\frac{8}{13}$ unmöglich.
2	43	131	$\frac{4 \cdot 11}{7 \cdot 11} = \frac{4}{7}$; $z = 4$ und die befreundeten Zahlen: $\begin{cases} 4 \cdot 5 \cdot 131 \\ 4 \cdot 17 \cdot 43. \end{cases}$
4	79	239	$\frac{16 \cdot 5}{3 \cdot 47}$
5	97	293	$\frac{2 \cdot 49}{173}$
17	313	941	$\frac{2 \cdot 157}{557}$
19	349	1049	$\frac{2 \cdot 5^2 \cdot 7}{27 \cdot 23}$
20	367	1103	$\frac{16 \cdot 23}{653}$
24	439	1319	$\frac{8 \cdot 5 \cdot 11}{781}$ unnütz, $= \frac{8 \cdot 5}{71}$.

Beispiel 6

§114 Es sei $a = 37$ und $b = 227$; es wird $\int a = 38$, $\int b = 228$ und $\frac{m}{n} = \frac{1}{6}$ sein; wenn die Zahlen

$$37(6x-1) \quad \text{und} \quad 227(x-1)z$$

befreundet sind, wird

$$\frac{z}{\int z} = \frac{6 \cdot 38x}{449x-264} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 19x}{449x-264}$$

sein. Weil hier x eine gerade Zahl ist, setze man $x = 2p$, dass die Zahlen

$$x-1 = 2p-1 \quad \text{und} \quad 6x-1 = 12p-1$$

prim sein müssen und es wird

$$\frac{z}{\int z} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 19p}{449p-132}$$

sein. Nun muss aus dem Zähler entweder der Faktor 4 oder 3 herausgeworfen werden.

I. Man werfe den Faktor 3 heraus; dafür setze man $p = 3q$, dass

$$\frac{z}{\int z} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 19q}{449q-44}$$

ist; nun werde $q = 3r+1$ und es wird

$$\frac{z}{\int z} = \frac{4 \cdot 19(3r+1)}{449r+135}$$

und $p = 9r+3$ und

$$x-1 = 18r+5, \quad 6x-1 = 108r+35$$

sein.

r	$x-1$	$6x-1$	$\frac{z}{\int z}$
2	41	251	$\dfrac{4\cdot 19\cdot 7}{1033}$
3	59	359	$\dfrac{4\cdot 19\cdot 10}{1482} = \dfrac{4\cdot 5}{3\cdot 13}$
6	113	683	$\dfrac{4\cdot 19\cdot 19}{3\cdot 23\cdot 41}$
13	239	1439	$\dfrac{4\cdot 19\cdot 40}{4\cdot 1493}$
17	311	1871	$\dfrac{16\cdot 13\cdot 19}{8\cdot 971}$
22	401	2411	$\dfrac{4\cdot 19\cdot 67}{10013} = \dfrac{4\cdot 67}{17\cdot 31}\ \boxed{\dfrac{67}{4\cdot 17}}\ \dfrac{16}{31}\ \boxed{\dfrac{16}{31}}$
			$z = 16\cdot 67$ und die befreundeten Zahlen: $\begin{cases} 16\cdot 67\cdot 37\cdot 2411 \\ 16\cdot 67\cdot 227\cdot 401. \end{cases}$
117	2111	12671	$\dfrac{4\cdot 19\cdot 352}{52668} = \dfrac{128\cdot 11\cdot 19}{4\cdot 7\cdot 9\cdot 11\cdot 19} = \dfrac{32}{63};$
			$z = 32$ und die befreundeten Zahlen $\begin{cases} 32\cdot 37\cdot 12671 \\ 32\cdot 227\cdot 2111. \end{cases}$

II. Man werfe den Faktor 4 heraus; man setze $p = 4q$; es wird

$$\frac{z}{\int z} = \frac{4\cdot 3\cdot 19q}{449q - 33}$$

sein; nun sei $q = 4r + 1$; es wird $p = 16r + 4$ und

$$x - 1 = 32r + 7, \quad 6x - 1 = 192r + 47$$

sowie

$$\frac{z}{\int z} = \frac{3\cdot 19(4r+1)}{449r + 104}$$

sein.

r	$x-1$	$6x-1$	$\frac{z}{\int z}$
0	7	47	$\frac{3\cdot 19}{8\cdot 13}\ \boxed{\frac{19}{4\cdot 5}}\ \frac{3\cdot 5}{2\cdot 13}\ \boxed{\frac{5}{2\cdot 3}}\ \frac{3^2}{13}\ \boxed{\frac{3^2}{13}}$
			$z = 3^2\cdot 5\cdot 19$ und die befreundeten Zahlen: $\begin{cases} 3^2\cdot 5\cdot 19\cdot 37\cdot 47 \\ 3^2\cdot 5\cdot 19\cdot 227\cdot 7. \end{cases}$
2	71	431	$\frac{9\cdot 19}{2\cdot 167}$
8	263	1583	$\frac{3\cdot 19\cdot 33}{16\cdot 3\cdot 7\cdot 11} = \frac{3\cdot 19}{16\cdot 7}\ \boxed{\frac{19}{4\cdot 5}}\ \frac{3\cdot 5}{4\cdot 7}\ \boxed{\frac{5}{2\cdot 3}}\ \frac{3^2}{2\cdot 7}\ \boxed{\frac{3^2}{13}}\ \frac{13}{14}\ \boxed{\frac{13}{14}}$
			$z = 3^2\cdot 5\cdot 13\cdot 19$ und die befreundeten Zahlen: $\begin{cases} 3^2\cdot 5\cdot 13\cdot 19\cdot 37\cdot 1583 \\ 3^2\cdot 5\cdot 13\cdot 19\cdot 227\cdot 263. \end{cases}$
15	487	2927	$\frac{3\cdot 19\cdot 61}{7\cdot 977}$
23	743	4463	$\frac{9\cdot 19\cdot 31}{9\cdot 19\cdot 61} = \frac{31}{61}$
26	839	5039	$\frac{3\cdot 19\cdot 105}{2\cdot 3\cdot 13\cdot 151} = \frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot 19}{2\cdot 13\cdot 151}$
30	967	5807	$\frac{3\cdot 19\cdot 11}{2\cdot 617}$
41	1319	7919	$\frac{3\cdot 19\cdot 165}{9\cdot 121\cdot 17} = \frac{5\cdot 19}{11\cdot 17}.$

Beispiel 7

§115 Es sei $a = 79$, $b = 11\cdot 19 = 209$, $\int a = 80$, $\int b = 240$; es wird $m = 1$, $n = 3$ sein und die befreundeten Zahlen seien

$$79(3x-1)z \quad \text{und} \quad 11\cdot 19(x-1)z;$$

es wird

$$\frac{z}{\int z} = \frac{240x}{446x - 288} = \frac{120x}{223x - 144}$$

sein. Es sei $x = 2p$; es wird

$$\frac{z}{\int z} = \frac{120p}{223p - 72}$$

sein und die Zahlen $2p - 1$ und $6p - 1$ müssen prim sein. Nun muss aber aus dem Zähler $120p$ entweder der Faktor 8 oder 3 herausgeworfen werden.

I. Man werfe den Faktor 3 heraus; es sei $p = 9q$; es wird

$$\frac{z}{\int z} = \frac{120q}{223q - 8}$$

sein und es werde $q = 3r - 1$, dass

$$\frac{z}{\int z} = \frac{40(3r - 1)}{223r - 77}$$

ist, $p = 27r - 9$ und

$$x - 1 = 54r - 19 \quad \text{sowie} \quad 3x - 1 = 162r - 55.$$

Nun muss aber wegen der abundanten Zahl 40 entweder 5 oder 4 herausgeworfen werden.

α) Man werfe 5 heraus und es sei $r = 5s - 1$; es wird

$$\frac{z}{\int z} = \frac{8(15s - 4)}{223s - 60}$$

sein und die Zahlen $x - 1 = 270s - 73$, $3x - 1 = 810s - 217$ müssen prim sein. Und damit drei nicht erneut in den Zähler eintritt, sind die Fälle $s = 3\alpha - 1$ auszuschließen. Daher wird aber nichts gefunden.

β) Weil $\frac{z}{\int z} = \frac{40(3r-1)}{223r-77}$ ist, man werfe 4 heraus und es $r = 4s - 1$; es wird

$$\frac{z}{\int z} = \frac{10(12s - 4)}{223s - 75} = \frac{40(3s - 1)}{223s - 75}$$

sein; es sei $s = 4t + 1$; es wird

$$\frac{z}{\int z} = \frac{10(12t+2)}{223t+37} = \frac{20(6t+1)}{223t+37}$$

sein. Es sei weiter $t = 2u - 1$; es wird

$$\frac{z}{\int z} = \frac{10(12u-5)}{223u-93}$$

sein und wegen $r = 16t + 3 = 32u - 13$ wird $x - 1 = 1728 - 721$, $3x - 1 = 5148u - 2161$ sein. Aber der Wert von u kleiner als 16 macht diese Zahlen nicht prim, woher $\frac{z}{\int z} = \frac{2 \cdot 11 \cdot 17}{5 \cdot 139}$ wird, welcher wegen des Faktors 11 unnütz ist.

II. Also werfe man aus der Gleichung $\frac{z}{\int z} = \frac{120p}{223p-72}$ den Faktor 8 heraus. Man setze $p = 8q$; es wird

$$\frac{z}{\int z} = \frac{120q}{233q-9}$$

sein und nun sei $q = 8r - 1$; es wird

$$\frac{z}{\int z} = \frac{3 \cdot 5(8r-1)}{223r-29}$$

sein; aber wegen $p = 64r - 8$ wird

$$x - 1 = 128r - 17, \quad 3x - 1 = 384r - 49$$

sein. Daher werden die Werte $r = 3\alpha + 1$ und $r = 5\alpha \pm 1$ ausgeschlossen.

r	$x-1$	$3x-1$	$\frac{z}{\int z}$
2	239	719	$\frac{3\cdot 5^2}{139}$
3	367	1103	$\frac{3\cdot 23}{128}\ \boxed{\frac{23}{8\cdot 3}}\ \frac{3^2}{16}\ \boxed{\frac{3^2}{13}}\ \frac{13}{16}\ \boxed{\frac{13}{14}}\ \frac{7}{8}\ \boxed{\frac{7}{8}}$
			also $z = 3^2\cdot 7\cdot 13\cdot 23$
			$\frac{3\cdot 23}{128}\ \boxed{\frac{23}{8\cdot 3}}\ \frac{3^2}{16}\ \boxed{\frac{3^3}{8\cdot 5}}\ \frac{5}{6}\ \boxed{\frac{5}{6}}\ \frac{7}{8}\ \boxed{\frac{7}{8}}$
			also $z = 3^3\cdot 5\cdot 23$,

und die befreundeten Zahlen werden sein:

$$\begin{cases} 3^2\cdot 7\cdot 13\cdot 23\cdot 79\cdot 1103 \\ 3^2\cdot 7\cdot 13\cdot 23\cdot 11\cdot 19\cdot 367. \end{cases} \quad \text{oder} \quad \begin{cases} 3^2\cdot 5\cdot 23\cdot 79\cdot 1103 \\ 3^2\cdot 5\cdot 23\cdot 11\cdot 367. \end{cases}$$

Beispiel 8

§116 Es sei $a = 17\cdot 19$, $b = 11\cdot 59$; es wird $\int a = 18\cdot 20$, $\int b = 12\cdot 60$ und $m = 1$, $n = 2$ sein. Wenn also die befreundeten Zahlen

$$17\cdot 19(2x-1)z, \quad 11\cdot 59(x-1)z$$

gesetzt werden, wird

$$\frac{z}{\int z} = \frac{720x}{1295x - 972}$$

sein. Es sei $x = 2p$; es wird

$$\frac{z}{\int z} = \frac{720p}{1295p - 486}$$

sowie

$$x - 1 = 2p - 1, \quad 2x - 1 = 4p - 1$$

sein; damit keine von diesen durch 3 teilbar ist, muss $p = 3q$ sein, dass

$$\frac{z}{\int z} = \frac{720q}{1295q - 162}$$

und

$$x - 1 = 6q - 1, \quad 2x - 1 = 12q - 1$$

ist. Man werfe aus dem Zähler den Faktor 16 heraus und es sei $q = 2r$; es wird

$$\frac{z}{\int z} = \frac{720r}{1295r - 81}$$

sein; nun sei $r = 16s - 1$; es wird

$$\frac{z}{\int z} = \frac{45(16s - 1)}{1295s - 86}$$

und

$$x - 1 = 192s - 13, \quad 2x - 1 = 384s - 25$$

sein. Es sei $s = 1$; es wird $x - 1 = 179$, $2x - 1 = 359$ und

$$\frac{z}{\int z} = \frac{45 \cdot 15}{1209} = \frac{225}{403} = \frac{3^2 \cdot 5^2}{13 \cdot 31} \boxed{\frac{3^2}{13}} \frac{5^2}{31} \boxed{\frac{5^2}{31}}$$

Also ist $z = 3^2 \cdot 5^2$ und die befreundeten Zahlen werden sein:

$$\begin{cases} 3^2 \cdot 5^2 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 359 \\ 3^2 \cdot 5^2 \cdot 11 \cdot 59 \cdot 179. \end{cases}$$

SCHOLION

§117 Diese letzte in Problem 5 dargestellte Methode ist vollkommen anders als die vorhergehende Methode, welche die vier ersten Probleme umfassen: Während in dieser der gemeinsame Faktor gesucht wird, ist er in jener gegeben. Dennoch hat jeder der beiden einen einzigartigen Vorteil, dass die eine ohne Hilfe der anderen nicht geeignet ist, um die Menge der befreundeten Zahlen zu vergrößern. Denn die zweite Methode gibt gemeinsame Faktoren von solcher Art an die Hand, welche sich bei Gebrauch der ersten kaum hätten vermuten lassen, die erste gibt hingegen die übrigen für dieses Ziel geeigneten Faktoren. Weiterhin enthält alles, was ich hier angegeben habe, ein Beispiel einer unbekannten höheren Methode, welche ich, soweit es mir möglich war, auf algebraische Regeln zurückgeführt habe, damit die Ungewissheit für den Forscher etwas verringert wird. Anstelle eines Schlussschnörkels möchte ich hier die 61 Paare an befreundeten Zahlen beifügen, welche ich mit diesen Methoden gefunden habe.

Liste von befreundeten Zahlen

$$\text{I.}\quad \begin{cases} 2^2 \cdot 5 \cdot 11 \\ 2^2 \cdot 71 \end{cases}$$

$$\text{II.}\quad \begin{cases} 2^4 \cdot 23 \cdot 47 \\ 2^4 \cdot 1151 \end{cases}$$

$$\text{III.}\quad \begin{cases} 2^7 \cdot 191 \cdot 383 \\ 2^7 \cdot 73727 \end{cases}$$

$$\text{IV.}\quad \begin{cases} 2^2 \cdot 23 \cdot 5 \cdot 137 \\ 2^2 \cdot 23 \cdot 827 \end{cases}$$

$$\text{V.}\quad \begin{cases} 3^2 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 5 \cdot 17 \\ 3^2 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 107 \end{cases}$$

$$\text{VI.}\quad \begin{cases} 3^2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 11 \cdot 19 \\ 3^2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 239 \end{cases}$$

$$\text{VII.}\quad \begin{cases} 3^2 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 5 \cdot 41 \\ 3^2 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 251 \end{cases}$$

$$\text{VIII.}\quad \begin{cases} 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 53 \cdot 1889 \\ 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 102059 \end{cases}$$

$$\text{IX.}\quad \begin{cases} 2^2 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 389 \cdot 509 \\ 2^2 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 198899 \end{cases}$$

$$\text{X.}\quad \begin{cases} 3^2 \cdot 5 \cdot 19 \cdot 37 \cdot 7 \cdot 887 \\ 3^2 \cdot 5 \cdot 19 \cdot 37 \cdot 7103 \end{cases}$$

$$\text{XI.}\quad \begin{cases} 3^4 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 89 \\ 3^4 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 2699 \end{cases}$$

$$\text{XII.}\quad \begin{cases} 3^2 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 41 \cdot 461 \\ 3^2 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 19403. \end{cases}$$

$$\text{XIII.}\quad \begin{cases} 3^2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 29 \cdot 569 \\ 3^2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 17099 \end{cases}$$

$$\text{XIV.}\quad \begin{cases} 3^2 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 97 \cdot 5 \cdot 193 \\ 3^2 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 97 \cdot 1163 \end{cases}$$

$$\text{XV.}\quad \begin{cases} 3^2 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 41 \cdot 163 \cdot 5 \cdot 977 \\ 3^2 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 41 \cdot 163 \cdot 5867 \end{cases}$$

$$\text{VIII.}\quad \begin{cases} 2^3 \cdot 17 \cdot 79 \\ 2^3 \cdot 23 \cdot 59 \end{cases}$$

$$\text{XVII.}\quad \begin{cases} 2^4 \cdot 23 \cdot 1367 \\ 2^4 \cdot 53 \cdot 607 \end{cases}$$

$$\text{XVIII.}\quad \begin{cases} 2^4 \cdot 47 \cdot 89 \\ 2^4 \cdot 53 \cdot 79 \end{cases}$$

$$\text{XIX.}\quad \begin{cases} 2^4 \cdot 23 \cdot 479 \\ 2^4 \cdot 89 \cdot 127 \end{cases}$$

$$\text{XX.}\quad \begin{cases} 2^4 \cdot 23 \cdot 467 \\ 2^4 \cdot 103 \cdot 107 \end{cases}$$

$$\text{XXI.}\quad \begin{cases} 2^4 \cdot 17 \cdot 5119 \\ 2^4 \cdot 239 \cdot 383 \end{cases}$$

$$\text{XXII.}\quad \begin{cases} 2^4 \cdot 17 \cdot 10303 \\ 2^4 \cdot 167 \cdot 1103 \end{cases}$$

$$\text{XXIII.}\quad \begin{cases} 2^4 \cdot 19 \cdot 1439 \\ 2^4 \cdot 149 \cdot 191 \end{cases}$$

$$\text{XXIV.}\quad \begin{cases} 2^5 \cdot 59 \cdot 1103 \\ 2^5 \cdot 79 \cdot 827 \end{cases}$$

$$\text{XXV.}\quad \begin{cases} 2^5 \cdot 37 \cdot 12671 \\ 2^5 \cdot 227 \cdot 2111 \end{cases}$$

$$\text{XXVI.}\quad \begin{cases} 2^5 \cdot 53 \cdot 10559 \\ 2^5 \cdot 79 \cdot 7127 \end{cases}$$

$$\text{XXVII.}\quad \begin{cases} 2^6 \cdot 79 \cdot 11807 \\ 2^6 \cdot 383 \cdot 2309 \end{cases}$$

$$\text{XXVIII.}\quad \begin{cases} 2^8 \cdot 383 \cdot 9203 \\ 2^8 \cdot 1151 \cdot 3067 \end{cases}$$

XXIX. $\begin{cases} 2^2 \cdot 11 \cdot 17 \cdot 263 \\ 2^2 \cdot 11 \cdot 43 \cdot 107 \end{cases}$

XXX. $\begin{cases} 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 71 \\ 3^3 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 31 \end{cases}$

XXXIII. $\begin{cases} 3^2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 29 \cdot 79 \\ 3^2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 11 \cdot 199 \end{cases}$

XXXII. $\begin{cases} 3^2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 47 \\ 3^2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 29 \cdot 31 \end{cases}$

XXXV. $\begin{cases} 3^2 \cdot 5 \cdot 19 \cdot 37 \cdot 47 \\ 3^2 \cdot 5 \cdot 19 \cdot 7 \cdot 227 \end{cases}$

XXXVI. $\begin{cases} 2^4 \cdot 67 \cdot 37 \cdot 2411 \\ 2^4 \cdot 67 \cdot 227 \cdot 401 \end{cases}$

XXXVII. $\begin{cases} 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 29 \\ 3^2 \cdot 5 \cdot 31 \cdot 89 \end{cases}$

XXXVIII. $\begin{cases} 2 \cdot 5 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 673 \\ 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 60659 \end{cases}$

XXXIX. $\begin{cases} 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 19 \cdot 107 \\ 2 \cdot 5 \cdot 47 \cdot 359 \end{cases}$

XL. $\begin{cases} 2^3 \cdot 11 \cdot 163 \cdot 191 \\ 2^3 \cdot 31 \cdot 11807 \end{cases}$

XLI. $\begin{cases} 3^2 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 23 \cdot 11 \cdot 19 \cdot 367 \\ 3^2 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 23 \cdot 79 \cdot 1103 \end{cases}$

XLII. $\begin{cases} 3^3 \cdot 5 \cdot 23 \cdot 11 \cdot 19 \cdot 367 \\ 3^3 \cdot 5 \cdot 23 \cdot 79 \cdot 1103 \end{cases}$

XLIII. $\begin{cases} 2^3 \cdot 11 \cdot 59 \cdot 173 \\ 2^3 \cdot 47 \cdot 2609 \end{cases}$

XLIV. $\begin{cases} 2^3 \cdot 11 \cdot 23 \cdot 2543 \\ 2^3 \cdot 383 \cdot 1907 \end{cases}$

XLVII. $\begin{cases} 2^3 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 239 \\ 2^3 \cdot 191 \cdot 449 \end{cases}$

XLVIII. $\begin{cases} 2^3 \cdot 29 \cdot 47 \cdot 59 \\ 2^3 \cdot 17 \cdot 4799 \end{cases}$

XLIX. $\begin{cases} 2^4 \cdot 17 \cdot 167 \cdot 13679 \\ 2^4 \cdot 809 \cdot 51071 \end{cases}$

L. $\begin{cases} 2^4 \cdot 23 \cdot 47 \cdot 9767 \\ 2^4 \cdot 1583 \cdot 7103 \end{cases}$

LI. $\begin{cases} 2^2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 1187 \\ 2^2 \cdot 43 \cdot 2267 \end{cases}$

LII. $\begin{cases} 3^2 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 1187 \\ 3^2 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 131 \cdot 971 \end{cases}$

LIII. $\begin{cases} 3^5 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 53 \cdot 11 \cdot 211 \\ 3^5 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 53 \cdot 2543 \end{cases}$

LIV. $\begin{cases} 3^2 \cdot 5^2 \cdot 11 \cdot 59 \cdot 179 \\ 3^2 \cdot 5^2 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 359 \end{cases}$

LV. $\begin{cases} 3^3 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 23 \cdot 397 \\ 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 21491 \end{cases}$

LVI. $\begin{cases} 3^4 \cdot 7 \cdot 11^2 \cdot 19 \cdot 47 \cdot 7019 \\ 3^4 \cdot 7 \cdot 11^2 \cdot 19 \cdot 389 \cdot 863 \end{cases}$

LVII. $\begin{cases} 3^4 \cdot 7 \cdot 11^2 \cdot 19 \cdot 53 \cdot 6959 \\ 3^4 \cdot 7 \cdot 11^2 \cdot 19 \cdot 179 \cdot 2087 \end{cases}$

LVIII. $\begin{cases} 3^5 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 47 \cdot 7019 \\ 3^5 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 389 \cdot 863 \end{cases}$

LIX. $\begin{cases} 3^5 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 53 \cdot 6959 \\ 3^5 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 179 \cdot 2087. \end{cases}$

Diesen lassen sich die zwei folgenden Paare hinzufügen, welche von anderer Form sind als die vorgehenden,

$$\text{LX.}\quad \begin{cases} 2^3 \cdot 19 \cdot 41 \\ 2^5 \cdot 199 \end{cases} \qquad \text{LXI.}\quad \begin{cases} 2^3 \cdot 41 \cdot 467 \\ 2^5 \cdot 19 \cdot 233. \end{cases}$$